



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Zauberflut 21 11 0  
B. J. Cornu's gnum  
Im Wunderrath  
Magazin für die neuen Dames 1/2  
der Boleffentes 4 Vol. 1/2

Theatre a l'usage des jeunes personnes  
par M. de la Comtesse de Genlis 4/6  
Traité de l'éducation des enfants par Condorcet  
Instruction de la jeune personne  
Conte de ma chère Loge 6/2  
La petite Thalie 8/2  
Mélange de la grande Thalie 1/2  
Spectacle d'Alger 1/2  
Le Châlon 5/2

Conte de la vie de Jean Louis de la Comtesse  
de la Comtesse de la Comtesse  
Conte de la vie de la Comtesse  
1/2 de la Comtesse de la Comtesse  
Nouvelles de la Comtesse 7/2  
Nouvelles de la Comtesse 19/2  
Soyez 4 3 2 19 20 Comtesse  
4 3 2 19 20 Comtesse  
Nouvelles de la Comtesse 13/2





Erster Unterricht

in der

# Algebraischen Auflösung

arithmetischer und geometrischer  
Aufgaben

Ein Lehrbuch

des Dessauischen Erziehungsinstitutes

von

Friedrich Gottlieb Busse

Professor und Lehrer der Mathematik.

---

Mit zwei Kupfertafeln.

---

Dessau

im Verlage der Instituts-Buchhandlung, und zu Leipzig  
in Commission bei Crusius. 1781.

QA  
35  
.B98

*[Faint, illegible handwritten notes]*

6193' 5.74

974 2 30 1111 1111 1111 1111

Fig. 2.  $\mu$  vs.  $\sigma$  for the  $\text{Fe}^{2+}$  and  $\text{Fe}^{3+}$  ions.

... ..

1992

Seiner Hochwürden

dem

Herrn Rötger

Prälat und Probst des Klosters U. L. Frauen

in Magdeburg

und

Seiner Hohehrwürden

dem

Herrn Schaumann

Pastor an der St. Marien-Kirche

in Salzwedel.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

1155 EAST 58TH STREET

CHICAGO, ILL. 60637

U.S.A.

TEL: 733-9328

1971

PHYSICS 311

LECTURE 1

1971

2



Hut. v. d. l.  
Seibel  
9-25-30.  
22346

Hochwürdiger Herr,  
Höchstzuerehrender Herr Probst,

Hochehrwürdiger  
Hochzuerehrender Herr Pastor,

Erlauben Sie es, verehrungs-  
würdige Männer, diesen ersten  
Versuch in meinen mathematischen  
Arbeiten, zum Beweise meiner schul-  
digsten Dankbarkeit und Hochachtung,  
Ihnen zuzuschreiben, deren treuem,  
geschmackvollem und gründlichem Un-  
terrichte ich die erste Neigung zu diesen  
Wissenschaften zu verdanken habe.

Der unermüdete Eifer, womit  
Ew. Hochwürden für die Ausbildung  
meiner jugendlichen Kräfte besorgt  
waren,

waren, die freundschaftliche Vertraulichkeit, wodurch Sie sich zu mir herabließen, und das Beispiel meiner Mitschüler und der übrigen verdienstvollen Lehrer, von denen Sie allgemein verehrt und geliebt wurden, bewürkte die ungemeine Dankbarkeit, Liebe und Hochachtung, die ich schon als Jüngling für Sie empfand. Je mehr ich in den folgenden Jahren, durch Erweiterung meiner Kenntnisse und Erfahrungen, den Wert solcher Männer schätzen lernte, welche mit einer ausgebreiteten Gelehrsamkeit und dem durchdringendsten Verstande eine unwandelbare Güte des Herzens verbinden, um desto mehr ward ich auch überzeugt, daß Ew. Hochwürden die größte Hochachtung und Liebe vollkommen verdienen, womit Sie so allgemein verehrt werden, und wovon — ein sicheres Zeichen

Zeichen des wahren Verdienstes — gerade diejenigen würdigen Männer, welche am nächsten mit Ihnen verbunden sind, vor einiger Zeit den thätigsten Beweis dargelegt haben.

Auch Sie, mein würdiger Lehrer in meiner frühern Jugend, verdienen meinen wärmsten Dank, für die Treue und Sorgfalt, womit Sie an mir gearbeitet, und meine vollkommenste Hochachtung, durch den seltenen Eifer, womit Sie, bei einer gründlichen Gelehrsamkeit und den vorzüglichsten Talenten, den größten Theil Ihres Lebens zum Besten der Jugend verwandt haben. Mit innigstem Vergnügen hab ich von Zeit zu Zeit die Nachricht erhalten, daß Ew. Hoch-  
ehrwürden in Ihrem verdienstvollen Alter, geliebt und geehrt von allen, die

Sie können, durch Lehre und Beispiel  
wahrscheinlich der Welt noch lange  
nützen werden.

Indem ich dis schreibe, bin ich so  
lebhaft, als noch niemalen, überzeugt,  
daß es eine der köstlichsten Freuden  
meiner folgenden Jahre sein werde,  
wenn auch diejenigen, an deren Bil-  
dung ich jetzt arbeite, als Männer  
einen Theil der Liebe und Hochachtung  
mir gewähren sollten, womit ich Sie  
meine ehemaligen treuen Lehrer, ver-  
ehre,

Em. Em. Hoch- und Hohehrwürden

gehorsamer Diener,

J. G. Duffe.



## Vorrede.

Was Algebra sei, und wozu sie nütze, werde ich hier nicht umständlich aus einander setzen. Beides würde für diejenigen, welche dieses Buch in die Hand nehmen, entweder unverständlich oder überflüssig sein. Wer indessen ungewis ist, ob er sich für die Mühe werden belohnt halten, die er etwan auf die ersten in diesem Buche vorgetragenen Lehren dieser Wissenschaft verwenden möchte, der frage sich: ob ihn nicht viele von den gewöhnlichen Rechnungsregeln, bei nicht alltäglichen Aufgaben, oft verlassen, oder gar auf lächerliche Resultate gebracht haben; ob ihn die Menge der verschiednen Regeln in den Rechenbüchern nicht sehr oft verwirre; ob es ihm nicht ziemlich schwer falle, die Gründe und die richtige Anwendung einer jeden Rechnungsart zu prüfen, deutlich zu übersehen, und auch andern begreiflich zu machen; ob er nicht öfters über die Richtigkeit solcher Behauptungen, als man etwan §§. 312. 311. 315. 270. erwiesen findet, nach vielen mühsamen Versuchen ungewis geblieben sei; ob ihm, auch bei hinlänglicher Kenntnis der Elementargeometrie, die besten von unsern neuen Lehrbüchern in den Anfangsgründen der Naturlehre und der angewandten Mathematik nicht unverständlich geblieben sind? Ein jeder aber, der nur einige Fertigkeit in den ersten Lehren der Algebra erlangt hat, wird dagegen versichern, daß er auch durch ganz neue Rechnungsaufgaben nicht leicht in Verlegenheit gesetzt werde; daß er sehr viele, auch im gemeinen Leben vorkommende, Aufgaben

\* 5

gaben

gaben durch die leichte und deutliche algebraische Auflösung weit lieber, vollkommener und sicherer, als nach manchen einzelnen Rechnungsregeln beantworte; daß ihm nicht nur jede Anwendung der theoretischen Mathematik, sondern auch überhaupt alle Untersuchungen über jede Art der Größen, durch die algebraischen Ausdrücke sehr erleichtert sind, und fast alle Lehrbücher, welche diese zu vermeiden suchen, durch etelhafte Weiterschweifigkeit ihm undeutlich werden.

Man wird es leicht entdecken, daß die ersten Kapitel dieses Lehrbuches für solche Anfänger bestimmt sind, welche noch gar keinen Unterricht in der Mathematik genossen haben, die folgenden Kapitel aber mit einem nebenher gegebenen Unterrichte in der Elementargeometrie abwechseln sollen. Daß die ersten Lehren der Algebra wenigstens eben so leicht und faßlich sind, als die ersten Wahrheiten der Geometrie, darf ich wol nicht weiter zu beweisen suchen. Verschiedne kleine Lehrbücher, welche sich für Anweisungen zur Algebra ausgeben, und doch nur ihre ersten Anfangsgründe vortragen, haben Gelegenheit gegeben, diese ganze Wissenschaft für leichter zu halten, als sie wirklich ist. Nicht ganz so überflüssig mögte es für einige Leser sein, wenn ich einige Gründe kürzlich berühre, warum ich glaube, daß die ersten Lehren der Algebra zur ersten Übung im gründlichen Denken geschickter sind, als die Anfangslehren der Geometrie; daß sie auch für Anfänger angenehmer und unterhaltender sind; und endlich auf mancherlei Weise dazu beitragen, selbst den Unterricht in der Geometrie zu erleichtern und angenehmer zu machen.

Die

Die sinnliche Darstellung der ersten geometrischen Lehrsätze durch die Figuren kan die Einsicht in die geometrischen Beweise gewis nicht so sehr befördern, als man gewöhnlich glaubt. Denn nur für schon geübte Denker, und nicht für Anfänger, bleibt die Ueberzeugung des Verstandes durch Schlüsse auch da noch wichtig, wo schon der erste Anblick der Zeichnung von der Wahrheit der Behauptung und der Unmöglichkeit des Gegentheiles einen augenscheinlichen Beweis giebt. Eine leichte Uebersicht der Seite 337, 339. angeführten geometrischen Arbeiten wird es zeigen, daß dies wenigstens bei den ersten 15 Lehrsätzen der Fall ist. Eben dies ist eine von den Hauptursachen, warum die ersten Arbeiten der Geometrie auch für die besten Köpfe mehrentheils so wenig Reiz haben. Man hätte ein sicheres Mittel diese, dem ersten Anscheine nach so unbedeutenden, Sätze auch den Anfängern wichtig zu machen, wenn man ihnen zeigen könnte, daß sie nur vermittelst dieser Lehren einige offenbar nützliche, oder wenigstens unterhaltende, Aufgaben auflösen könnten. Wir sind etwan nur zwei dergleichen Aufgaben bekannt. Die unter Nummer 9 . . . . 12, 18. angeführten Aufgaben sind den ungedübtesten Schülern nicht so bald vorgelegt, als sie schon die mechanische Auflösung bei der Hand haben, und der wichtige Vorzug der geometrischen Auflösung vor der mechanischen hat wiederum für denselben keinen Wert, der sich von der Nothwendigkeit der Postulate noch keine Vorstellung machen kan. Die sinnlichen Zeichen der Algebra hingegen erleichtern die Ueberschauung der Schlussfolgen, ohne uns von der Wahrheit des gefolgerten Satzes selbst durch den Augenschein zu überzeugen.

Nicht

Nicht das bloße Anschauen der Buchstaben und Gleichungen, sondern das Ueberdenken der mit den sinnlichen Zeichen verbundenen Begriffe und der Gründe, wonach die eine Gleichung aus der andern folgt, kann die gewünschte Ueberzeugung gewähren. Die Belohnung für diese Anfangs sehr geringe Anstrengung des Verstandes erfolgt unmittelbar durch die gesundene Auflösung einer Aufgabe, welche schon darum angenehm ist, weil sie auf den ersten Anblick nicht so gar leicht schien. Die Menge ähnlicher Aufgaben, welche sich durch die wenigen in den ersten Lehrstunden gefaßten Kunstgriffe auflösen lassen, unterhalten sogleich den ersten Eifer der Anfänger auch außer den Lehrstunden.

Diejenigen Lehren der Arithmetik, welche von einem jeden Lehrbuche der Geometrie abgehandelt werden, sind theils zur ersten Anwendung der geometrischen Lehrsätze auf die Ausmessung der Figuren, theils zur Trigonometrie unentbehrlich. Die Beweise derselben sind nur alsdann äußerst schwierig und ermüdend, wenn man alle algebraische Zeichen und Schlüsse vermeiden muß, und werden dadurch — besonders wenn man mit ihnen den Anfang des mathematischen Unterrichts macht — eine neue Ursache, warum so wenige junge Leute an dieser Wissenschaft Geschmack finden. Solche Aufgaben, als im 5ten, 8ten, 13ten und 15ten Kapitel dieses Buches vorgerragen sind, zeigen einem, jedem Anfänger einleuchtenden, Nutzen des eben erläuterten geometrischen Wahrheiten, und geben zur angenehmen Wiederholung gute Gelegenheit. Man findet endlich schon in des Herrn Prof. Eberts bekanntem Lehrbuche verschiedene Beispiele, wie leicht sich manche unentbehrliche geometrische Lehrsätze, deren geometrischer Beweis für

Anfänger



Anfänger zu schwer ist, aus andern erwiesenen Begehrten durch leichte algebraische Schlüsse mit Ueberzeugung hervorgeleitet lassen. Dergleichen Erleichterungen sind mit demnächst wichtig, weil ich meine Schüler an dem angenehmen Unterrichte in der Naturlehre und der angewandten Mathematik nicht eher möchte Theil nehmen lassen, als bis sie ein kleines System von den nöthigsten Lehren der Elementargeometrie und Trigonometrie im Zusammenhange deutlich überschauen und ebenfalls selbst aufs Papier bringen können. (\*)

Für diejenigen, welche etwa diese Gründe billigen und ihren ersten Unterricht in der Mathematik auf ähnliche Weise einrichten wollen, hab ich am Ende des 4ten, 7ten, 10ten, und 14ten Kapitels angezeigt, wie ich den Vortrag der Geometrie mit der Buchstabenrechnung verbunden.

(\*) Wenn sie ohngefähr die im Anhang p. 337. angeführten geometrischen Lehren nebst der Trigonometrie, nach Herrn Professor Eberts Lehrbuch, und so viel Algebra, als in diesem Buche gelehrt ist, vollkommen inne haben, so sind sie erst fähig die ersten Gründe der angewandten Mathematik kennen zu lernen, wodurch diejenigen, welche vorzüglich zur Mathematik bestimmt sind, so viel Geschmak an dieser Wissenschaft gewinnen werden, daß sie — nicht, wie jetzt bisweilen verlangt wird, im 8ten — sondern etwa im 13ten Jahre die elementarischen, noch nicht die reine Geometrie nach einem Kästner, Segner, Karsten, für sich mit Nutzen und Vergnügen studiren werden. Ich mus hier noch bemerken, daß wir unsere Zöglinge gewöhnlich nicht vor dem 13ten oder 14 Jahre zum mathematischen Unterrichte zulassen.

banden habe. Die ersten 25 geometrischen Sätze erhalten durch die Algebra wenig Erleichterung. Ich pflege Ihnen aber bald Anfangs einen kleinen Theil der algebraischen Lehrestunden zu widmen, weil die glückliche Erlernung der Geometrie hauptsächlich von dem langsamen Fortschreiten zu neuen Lehrsätzen abhängt, und jeder Lehrsatz schon mehrmals, und zu verschiedenen Zeiten deutlich gedacht sein muß, ehe man den folgenden drauf gründet. Das vierte Kapitel von den Decimalbrüchen wird vorgetragen, indem man zwischen Num. 25 und 26 zum erstenmale Gelegenheit hat vom geometrischen Decimalmaße zu reden. Die Aufgaben des 5ten Kapitels zeigen die Anwendung der geometrischen Sätze von Num. 26 bis 35. Im 6ten Kapitel werden die ersten Lehrsätze der geometrischen Proportion in Zahlen vorgetragen. Nachdem man die Lehrlinge in der Anwendung dieser Lehren durch die nützlichen Aufgaben des 7ten Kapitels schon etwas geübt hat, so werden sie die Lehren von dem Verhältniß in Linien, von Num. 36 bis 40, mit Leichtigkeit und Vergnügen erlernen. Es wird nicht schwer sein, die ähnlichen Verbindungen zu entdecken, worin die mehrsten folgenden Kapitel mit dem geometrischen Unterrichte gesetzt sind.

Eine nach Art der Alten gegebne synthetische Beantwortung der LXVI und LXVIIten Aufgabe, würde mehr Scharffsin und Fertigkeit in der Geometrie erfordern, als die algebraische Auflösung, aber eben darum auch die Kräfte der ersten Anfänger übersteigen. Wer aus der Mathematik Hauptsache machen will, muß zu seiner Zeit auch an den Werken der Alten seinen Verstand schärfen. Für andere giebt es nur zu viele Fahren der angewandten

Mathe-

Mathematik, die, bei aller Erleichterung der Methode, ein scharfer Prüffstein ihres Verstandes werden könnte, und außer der Uebung im wolgeordneten Denken auch noch Kenntnisse gewären, welche für einen künftigen Regierungsrath, Amtman, Officer &c. weit nützlicher sind, als die Probleme der alten Geometer.

Nicht nur die Eulerische Classification der Gleichungen, sondern auch manche andere gefällige Ordnung hab ich der Hauptabsicht dieses Buches aufopfern müssen, wozu mir die stufenweise Zunahme der Schwierigkeiten, die Abwechselung des angenehmen mit dem nützlichen; und die allmähliche Vorbereitung zu neuen Lehren vorzüglich nötig schienen. Vielleicht bin ich so glücklich gewesen, nicht sowol durch weitläufige und wortreiche Erklärungen, als durch Anordnung und Stellung der nothen Begriffe, die ersten Lehren der Algebra so vorzutragen, daß sich Anfänger, auch ohne weitem Lehrmeister, nach diesem Buche unterrichten können. Von andern kleinen Lehrbüchern dieser Art ist es wenigstens darin verschieden, daß es auch den im gemeinen Leben so nützlichen Gebrauch der algebraischen Rechnungsart bei geometrischen Aufgaben zeigt. Wenn in einer dritten Abtheilung dieses Lehrbuches auf einigen Bogen noch etwas wenigens von den kubischen Gleichungen, eine weitere Ausföhrung des 18ten Kapitels von den unbestimmten Aufgaben, und eine Anweisung zu den logarithmischen Rechnungsaufgaben hinzugefügt würde; so mögten diese ersten Gründe der Algebra, nebst der Geometrie des Herrn Prof. Ebert oder Funk, ohngeföhr so viel von der reinen Mathematik enthalten, als einem jeden Gelehrten, nicht nur zum Verständnis der

leich.

kleinsten mathematischen und physikalischen Bücher, sondern auch in manchen andern Vorfällen des bürgerlichen Lebens ungemein nützlich sein würde.

Von denjenigen, welche sich selbst nach diesem Buche unterrichten wollen, müßten die ersten §§. des 1sten Kapitels bald anfangs gelesen werden; weil die ersten Anfänger, bei den höchst nöthigen, selbst versuchten, Auflösungen neuer Aufgaben, nur zu oft auf unbestimmte Gleichungen kommen.

Noch mus. ich anmerken, daß ich es mir erlaubt habe, die Fragegleichungen, welche mir bei dem mündlichen Unterricht in der Algebra und auch bei den analytischen geometrischen Beweisen sehr nützlich gewesen sind, auch in diesem Buche, als z. B. S. 181. abdrucken zu lassen.

Ferner hab ich in manchen Fällen z. B. S. 102, ... x drucken lassen, wo es ungewis war, ob man  $+x$  oder  $-x$  setzen sollte, indem  $\mp x$  die erlaubte Alternative anzeigt. Folgende Bezeichnung der arithmetischen Proportion,  $a \dots b = c \dots d$ , mögte in manchen Fällen bei dem ersten Unterrichte für Anfänger und auch für den Leser bequemer sein, als die sonst gewöhnlichen.

Wegen der am Ende des Buches sorgfältig angegebenen Verbesserungen, wird mich ein jeder entschuldigen, der es aus Erfahrung weiß, wie schwer es ist, ermüdet von andern täglichen Geschäften, die Korrekturen eines mathematischen Buches mit gehöriger Aufmerksamkeit zu besorgen.





Erste Abtheilung

zum Gebrauch

der

untersten Klasse.



## Vorläufiger Unterricht in den nöthigsten Regeln zur Multiplikation und Division in gebrochenen Zahlen.

**S**ob wir gleich beim Gebrauche dieses Buches eine ziemliche Fertigkeit in den vier ersten Veränderungsarten der ganzen und gebrochenen Zahlen voraussetzen; so wollen wir doch diejenigen Regeln für die Multiplikation und Division der Brüche, bei welchen die ersten Anfänger gewöhnlich einige Schwierigkeit finden, auf folgende Weise vortragen.

Wenn der Zähler des Bruches  $\frac{4}{3}$  durch 3 multiplicirt wird; so erhält man  $\frac{12}{3}$ , welches offenbar 3 mal so viel ist als  $\frac{4}{3}$ . Wird aber nun in diesem neuen Bruche  $\frac{12}{3}$  auch der Nenner durch eben dieselbe Zahl 3 multiplicirt; so erhält man  $\frac{12}{9}$ , welches dreimal weniger ist, als  $\frac{12}{3}$ : indem  $\frac{12}{9}$  eines jeden Dinges allemal 3 mal weniger ist, als  $\frac{12}{3}$  desselben Dinges. Da nun also durch die erste Multiplikation des Zählers der Bruch  $\frac{4}{3}$  dreimal größer, durch die zweite Multiplikation des Nenners aber dieser dreimal größere Bruch wiederum

N. 2 dreimal

dreimal kleiner gemacht ist; so mus der nach diesen beiden sich selbst aufhebenden Veränderungen hervorgebrachte neue Bruch  $\frac{1}{1} \frac{2}{2}$  einerlei Werth mit dem ersten  $\frac{2}{3}$  haben.

Eben so ist  $\frac{8}{3}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{8}{12}$  aber wiederum dreimal weniger, als  $\frac{8}{3}$ ; also mus  $\frac{8}{12}$  eben so viel sein, als  $\frac{2}{3}$ . Und auf diese Weise kan für einen jeden Fal gezeigt werden, daß allemal der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl multiplicirt werden. (\*)

Wenn man den Zähler des Bruches  $\frac{2}{3}$  durch 3 dividirt; so erhält man  $\frac{2}{9}$ , welches offenbar 3 mal weniger

(\*) Eben dieser Satz könnte auch auf folgende Weise sehr faßlich dargethan werden.

Ich behaupte, daß z. B.  $\frac{2}{3}$  eben so viel ist, als  $\frac{8}{12}$ , welcher letztere Bruch aus dem ersten entsteht, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4, multiplicirt werden. Um sich davon zu überzeugen; so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man bloß den Zähler des ersten durch die Zahl 4 multiplicirt: wodurch man den Bruch  $\frac{8}{3}$  erhält. Nun ist offenbar

$\frac{2}{3}$  viermal weniger, als  $\frac{8}{3}$ , und ebenfalls auch  $\frac{8}{12}$  viermal weniger, als  $\frac{8}{3}$ , folglich mus nothwendig  $\frac{2}{3}$  eben so viel sein, als  $\frac{8}{12}$ .

weniger ist, als  $\frac{5}{3}$ . Wird nun aber auch der Nenner dieses neuen Bruches  $\frac{2}{3}$  durch 3 dividirt; so erhält man den Bruch  $\frac{2}{9}$ , welcher wiederum 3 mal mehr anzeigt, als  $\frac{2}{3}$ : weil  $\frac{1}{3}$  eines Dinges allemal dreimal mehr ist, als  $\frac{1}{9}$  desselben Dinges. Folglich mus auch hier der nach beiden Veränderungen hervorgekommene Bruch  $\frac{2}{9}$  mit dem ersten  $\frac{5}{3}$  einerlei Werth haben. Und da man ebenfalls bei einem jeden andern Bruch, und einer jeden andern zum Divisor angenommenen Zahl, dieselbe Betrachtung anbringen kan: so ist auch dieser Satz allgemein; daß der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt werden. (\*)

U 3

$\frac{2}{3}$  durch

(\*) Auch dieser Satz läßt sich auf folgende Weise darthun:

Ich behaupte, daß z. B.  $\frac{8}{12}$  eben so viel ist, als  $\frac{2}{3}$ , welcher letztere Bruch aus dem ersten hervorgebracht wird, indem man Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4 dividirt.

Um sich davon zu überzeugen, so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man bloß den Zähler des ersten durch diese Zahl 4 dividirt, wodurch man den Bruch  $\frac{2}{12}$  erhält. Nun ist offenbar

$\frac{8}{12}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{12}$ , und ebenfalls auch  $\frac{2}{3}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{12}$ ; folglich mus nothwendig  $\frac{8}{12}$  eben so viel, als  $\frac{2}{3}$  sein.

$\frac{2}{3}$  durch 8 multipliciren, heißt nichts anders, als  $\frac{2}{3}$  achtmal nehmen.  $\frac{2}{3}$  8 mal genommen, giebt aber ohne Zweifel  $\frac{16}{3}$ , und eben so ist  $\frac{2}{3} \cdot 4$  (das ist  $\frac{2}{3}$  durch 4 multiplicirt) gleich  $\frac{8}{3}$ ,  $\frac{5}{8} \cdot 3$  gleich  $\frac{15}{8}$ .

Wenn daher I. ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist; so erhält man das verlangte Product aus diesen beiden Zahlen, indem man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl multiplicirt, und unter dieses Product den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

$8 \cdot \frac{2}{3}$  das ist, 8 durch  $\frac{2}{3}$  multiplicirt, mus offenbar eben so viel geben;  $\frac{2}{3} \cdot 8$ ; also mus auch  $8 \cdot \frac{2}{3}$  geben  $\frac{16}{3}$ ,  $4 \cdot \frac{2}{3}$  geben  $\frac{8}{3}$ ,  $3 \cdot \frac{5}{8}$  geben  $\frac{15}{8}$ .

Sol daher II. eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden; so erhält man das verlangte Product, indem man die ganze Zahl durch den Zähler des Bruches multiplicirt, und unter dieses Product den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

Von dieser Regel kan man sich auch auf folgende Weise leicht überzeugen, wenn man bedenkt, daß  $8 \cdot \frac{2}{3}$ , das ist, 8 zwei Drittel mal genommen, nothwendig 3 mal weniger geben mus, als

8.2

8.2, das ist, 8 zwei mal ganz genommen. Da nun 8.2 giebt 16, so mus 8.  $\frac{2}{3}$  geben  $\frac{16}{3}$ , indem  $\frac{16}{3}$  dreimal weniger ist, als 16, so wie  $\frac{1}{3}$  dreimal weniger ist, als 1.

Wenn III. ein Bruch durch eine ganze Zahl z. B.  $\frac{5}{7}$  durch 3 zu dividiren ist: so kan man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiren, und unter diesem Quotienten den Nenner des Bruches als Divisor schreiben; oder den Nenner des Bruches durch die gegebene ganze Zahl multipliciren.

Nach der ersten Art erhält man zum Quotienten den Bruch  $\frac{5}{21}$ , welcher auch wirklich 3 mal kleiner ist, als  $\frac{5}{7}$ ; nach der zweiten Art erhält man zum Quotienten den Bruch  $\frac{5}{21}$ , welcher ebenfalls 3 mal weniger ist als  $\frac{5}{7}$ .

Sol IV. eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden; so multiplicire man die ganze Zahl durch den Nenner des Divisors, und schreibe unter dieses Produkt den Zähler des Divisors, so wird der auf diese Weise entstehende neue Bruch der verlangte Quotient sein.

Z. B. 5 dividirt durch  $\frac{2}{3}$ , giebt  $\frac{15}{2}$ .

U 4

Denn

Denn 5 durch 2 dividirt würde geben  $\frac{5}{2}$ . Da nun aber der Divisor  $\frac{2}{3}$  dreimal kleiner ist, als 2; so mus der Quotient aus 5 durch  $\frac{2}{3}$  dividirt dreimal größer sein, als  $\frac{5}{2}$ , also giebt  $\frac{15}{2}$  allerdings den verlangten Quotienten.

Wenn V. ein Bruch durch einen andern Bruch. 3. B.  $\frac{4}{3}$  durch  $\frac{3}{7}$  zu multipliciren ist: so kan man den Zähler des einen Bruches durch den Zähler des andern, und auch den Nenner des einen Bruches durch den Nenner des andern multipliciren; der dadurch entstehende neue Bruch,  $\frac{12}{21}$ , ist das verlangte Produkt aus den beiden Brüchen,  $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}$ .

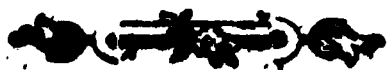
Denn  $\frac{4}{3} \cdot 3$  würde geben  $\frac{4}{1}$ . Da nun aber in  $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}$  der eine Faktor,  $\frac{3}{7}$ , siebenmal kleiner ist, als 3; so mus auch das Produkt aus  $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7}$  siebenmal kleiner sein, als das Produkt aus  $\frac{4}{3} \cdot 3$ . Es ist aber in der That  $\frac{12}{21}$  siebenmal kleiner, als  $\frac{4}{1}$ , da  $\frac{12}{21}$  siebenmal kleiner ist, als  $\frac{4}{3}$ .

Sol endlich VI. ein Bruch,  $\frac{4}{3}$ , durch einen andern,  $\frac{3}{7}$ , dividirt werden; wo also  $\frac{4}{3}$  der Dividendus,  $\frac{3}{7}$  der Divisor ist: so erhält man den Quotienten, wenn man den Divisor umgekehrt, stat  $\frac{3}{7}$  also  $\frac{7}{3}$  schreibt, und durch diesen



diesen umgekehrten Divisor den Dividendus (nach V) multiplicirt.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4}$  also, oder  $\frac{1}{12}$ , ist der verlangte Quotient.

Denn  $\frac{2}{3}$  durch 4 dividirt würde (nach III.) geben  $\frac{2}{12}$ . Da nun aber in  $\frac{2}{3}$  durch  $\frac{4}{3}$  dividirt, der Divisor  $\frac{4}{3}$  fünfmal kleiner ist, als 4; so mus im Gegentheil der Quotient aus  $\frac{2}{3}$ , durch  $\frac{4}{3}$  dividirt, fünfmal größer sein, als der Quotient aus  $\frac{2}{3}$  durch 4 dividirt, welcher  $\frac{2}{12}$  ist. Es ist aber in der That  $\frac{1}{12}$  fünfmal größer, als  $\frac{2}{12}$ .





---

## Vorläufiger Unterricht in den nöthigsten Regeln zur Multiplikation und Division in gebrochenen Zahlen.

**S**ob wir gleich beim Gebrauche dieses Buches eine ziemliche Fertigkeit in den vier ersten Veränderungsarten der ganzen und gebrochenen Zahlen voraussetzen; so wollen wir doch diejenigen Regeln für die Multiplikation und Division der Brüche, bei welchen die ersten Anfänger gewöhnlich einige Schwierigkeit finden, auf folgende Weise vortragen.

Wenn der Zähler des Bruches  $\frac{1}{3}$  durch 3 multiplicirt wird; so erhält man  $\frac{1 \cdot 3}{3}$ , welches offenbar 3 mal so viel ist als  $\frac{1}{3}$ . Wird aber nun in diesem neuen Bruche  $\frac{1 \cdot 3}{3}$  auch der Nenner durch eben dieselbe Zahl 3 multiplicirt; so erhält man  $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3}$ , welches dreimal weniger ist, als  $\frac{1 \cdot 3}{3}$ : indem  $\frac{1}{3}$  eines jeden Dinges allemal 3 mal weniger ist, als  $\frac{1}{1}$  desselben Dinges. Da nun also durch die erste Multiplikation des Zählers der Bruch  $\frac{1}{3}$  dreimal größer, durch die zweite Multiplikation des Nenners aber dieser dreimal größere Bruch wiederum

dreimal kleiner gemacht ist; so muß der nach diesen beiden sich selbst aufhebenden Veränderungen hervorgebrachte neue Bruch  $\frac{1}{3}$  einerlei Werth mit dem ersten  $\frac{4}{3}$  haben.

Eben so ist  $\frac{8}{3}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{8}{12}$  aber wiederum dreimal weniger, als  $\frac{8}{3}$ ; also muß  $\frac{8}{12}$  eben so viel sein, als  $\frac{2}{3}$ . Und auf diese Weise kann für einen jeden Fall gezeigt werden, daß allemal der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl multiplicirt werden. (\*)

Wenn man den Zähler des Bruches  $\frac{8}{3}$  durch 3 dividirt; so erhält man  $\frac{8}{9}$ , welches offenbar 3 mal weniger

(\*) Eben dieser Satz könnte auch auf folgende Weise sehr faßlich dargethan werden.

Ich behaupte, daß z. B.  $\frac{2}{3}$  eben so viel ist, als  $\frac{8}{12}$ , welcher letztere Bruch aus dem ersten entsteht, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4, multiplicirt werden. Um sich davon zu überzeugen; so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man bloß den Zähler des ersten durch die Zahl 4 multiplicirt: wodurch man den Bruch  $\frac{8}{3}$  erhält. Nun ist offenbar

$\frac{2}{3}$  viermal weniger, als  $\frac{8}{3}$ , und ebenfalls auch  $\frac{8}{12}$  viermal weniger, als  $\frac{8}{3}$ , folglich muß nothwendig  $\frac{2}{3}$  eben so viel sein, als  $\frac{8}{12}$ .

weniger ist, als  $\frac{5}{3}$ . Wird nun aber auch der Nenner dieses neuen Bruches  $\frac{2}{3}$  durch 3 dividirt; so erhält man den Bruch  $\frac{2}{9}$ , welcher wiederum 3 mal mehr anzeigt, als  $\frac{2}{3}$ : weil  $\frac{1}{3}$  eines Dinges allemal dreimal mehr ist, als  $\frac{1}{9}$  desselben Dinges. Folglich mus auch hier der nach beiden Veränderungen hervorgekommene Bruch  $\frac{2}{9}$  mit dem ersten  $\frac{5}{3}$  einerlei Werth haben. Und da man ebenfalls bei einem jeden andern Bruch, und einer jeden andern zum Divisor angenommenen Zahl, dieselbe Betrachtung anbringen kan: so ist auch dieser Satz allgemein; daß der Werth eines Bruches unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerlei Zahl dividirt werden. (\*)

U 3

$\frac{2}{3}$  durch

(\*) Auch dieser Satz läßt sich auf folgende Weise darthun:

Ich behaupte, daß z. B.  $\frac{8}{12}$  eben so viel ist, als  $\frac{2}{3}$ , welcher letztere Bruch aus dem ersten hervorgebracht wird, indem man Zähler und Nenner durch einerlei Zahl, nemlich durch 4 dividirt.

Um sich davon zu überzeugen, so verschaffe man sich noch einen dritten Bruch, indem man blos den Zähler des ersten durch diese Zahl 4 dividirt, wodurch man den Bruch  $\frac{2}{12}$  erhält. Nun ist offenbar

$\frac{8}{12}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{12}$ , und ebenfalls auch  $\frac{2}{3}$  viermal mehr, als  $\frac{2}{12}$ ; folglich mus nothwendig  $\frac{8}{12}$  eben so viel, als  $\frac{2}{3}$  sein.

$\frac{2}{3}$  durch 8 multipliciren, heißt nichts anders, als  $\frac{2}{3}$  achtmal nehmen.  $\frac{2}{3}$  8 mal genommen, giebt aber ohne Zweifel  $\frac{16}{3}$ , und eben so ist  $\frac{2}{3} \cdot 4$  (das ist  $\frac{2}{3}$  durch 4 multiplicirt) gleich  $\frac{8}{3}$ ,  $\frac{5}{8} \cdot 3$  gleich  $\frac{15}{8}$ .

Wenn daher I. ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist; so erhält man das verlangte Produkt aus diesen beiden Zahlen, indem man den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl multiplicirt, und unter dieses Produkt den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

$8 \cdot \frac{2}{3}$  das ist, 8 durch  $\frac{2}{3}$  multiplicirt, mus offenbar eben so viel geben;  $\frac{2}{3} \cdot 8$ ; also mus auch  $8 \cdot \frac{2}{3}$  geben  $\frac{16}{3}$ ,  $4 \cdot \frac{2}{3}$  geben  $\frac{8}{3}$ ,  $3 \cdot \frac{5}{8}$  geben  $\frac{15}{8}$ .

Sol daher II. eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden; so erhält man das verlangte Produkt, indem man die ganze Zahl durch den Zähler des Bruches multiplicirt, und unter dieses Produkt den Nenner des Bruches als Divisor schreibt.

Von dieser Regel kan man sich auch auf folgende Weise leicht überzeugen, wenn man bedenkt, daß  $8 \cdot \frac{2}{3}$ , das ist, 8 zwei Drittel mal genommen, nothwendig 3 mal weniger geben mus, als

8.2, das ist, 8 zwei mal ganz genommen. Da nun 8.2 giebt 16, so mus 8.  $\frac{2}{3}$  geben  $\frac{16}{3}$ , indem  $\frac{16}{3}$  dreimal weniger ist, als 16, so wie  $\frac{2}{3}$  dreimal weniger ist, als 1.

Wenn III. ein Bruch durch eine ganze Zahl z. B.  $\frac{5}{3}$  durch 3 zu dividiren ist: so kan man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiren, und unter diesem Quotienten den Nenner des Bruches als Divisor schreiben; oder den Nenner des Bruches durch die gegebene ganze Zahl multipliciren.

Nach der ersten Art erhält man zum Quotienten den Bruch  $\frac{2}{3}$ , welcher auch wirklich 3 mal kleiner ist, als  $\frac{5}{3}$ ; nach der zweiten Art erhält man zum Quotienten den Bruch  $\frac{5}{9}$ , welcher ebenfalls 3 mal weniger ist als  $\frac{5}{3}$ .

Sol IV. eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden; so multiplicire man die ganze Zahl durch den Nenner des Divisors, und schreibe unter dieses Produkt den Zähler des Divisors, so wird der auf diese Weise entstehende neue Bruch der verlangte Quotient sein.

Z. B. 5 dividirt durch  $\frac{2}{3}$ , giebt  $\frac{15}{2}$ .

A 4

Denn

Denn 5 durch 2 dividirt würde geben  $\frac{5}{2}$ . Da nun aber der Divisor  $\frac{2}{3}$  dreimal kleiner ist, als 2; so mus der Quotient aus 5 durch  $\frac{2}{3}$  dividirt dreimal größer sein, als  $\frac{5}{2}$ , also giebt  $\frac{15}{2}$  allerdings den verlangten Quotienten.

Wenn V. ein Bruch durch einen andern Bruch. Z. B.  $\frac{4}{3}$  durch  $\frac{2}{7}$  zu multipliciren ist: so kan man den Zähler des einen Bruches durch den Zähler des andern, und auch den Nenner des einen Bruches durch den Nenner des andern multipliciren; der dadurch entstehende neue Bruch,  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$ , ist das verlangte Produkt aus den beiden Brüchen,  $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$ .

Denn  $\frac{4}{3} \cdot 3$  würde geben  $\frac{4}{1}$ . Da nun aber in  $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$  der eine Faktor,  $\frac{2}{7}$ , siebenmal kleiner ist, als 3; so mus auch das Produkt aus  $\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7}$  siebenmal kleiner sein, als das Produkt aus  $\frac{4}{3} \cdot 3$ . Es ist aber in der That  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$  siebenmal kleiner, als  $\frac{1}{3}$ , da  $\frac{1}{7}$  siebenmal kleiner ist, als  $\frac{1}{1}$ .

Sol endlich VI. ein Bruch,  $\frac{2}{3}$ , durch einen andern,  $\frac{4}{5}$ , dividirt werden; wo also  $\frac{2}{3}$  der Dividendus,  $\frac{4}{5}$  der Divisor ist: so erhält man den Quotienten, wenn man den Divisor umgekehrt, stat  $\frac{4}{5}$  also  $\frac{5}{4}$  schreibt, und durch diesen



diesen umgekehrten Divisor den Dividendus (nach V) multiplicirt.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$  also, oder  $\frac{10}{12}$ , ist der verlangte Quotient.

Denn  $\frac{2}{3}$  durch 4 dividirt würde (nach III.) geben  $\frac{2}{12}$ . Da nun aber in  $\frac{2}{3}$  durch  $\frac{4}{5}$  dividirt, der Divisor  $\frac{4}{5}$  fünfmal kleiner ist, als 4; so mus im Gegentheil der Quotient aus  $\frac{2}{3}$ , durch  $\frac{4}{5}$  dividirt, fünfmal größer sein, als der Quotient aus  $\frac{2}{3}$  durch 4 dividirt, welcher  $\frac{2}{12}$  ist. Es ist aber in der That  $\frac{10}{12}$  fünfmal größer, als  $\frac{2}{12}$ .





## Erstes Kapitel.

Aufgaben, wobei die Anwendung der ersten algebraischen Grundsätze gelehrt wird.

### §. 1.

Wenn ich schreibe  $5 + 2 = 7$ ; so heist das: 5 und 2 ist gleich 7. Eben so bedeutet folgender Ausdruck:  $6 + 2 + 3 = 7 + 4$  nichts anders, als daß 6 und 2 und 3 zusammen addirt eben so viel geben, als 7 und 4 zusammen genommen.

### §. 2.

Wenn ich aber schreibe,  $7 - 2 = 5$ ; so wird das gelesen: 7 weniger 2 ist gleich 5.

Und folgender Ausdruck:  $8 - 2 - 3 = 2 + 1$ , sagt einerlei mit diesem,  $8 - 5 = 3$ .

### §. 3.

Wenn ich sage, daß  $x + 3 = 9$ ; wie viel ist alsdann  $x$ ? Antwort 6.

Wenn sein sol  $x + 2 = 9$ ; wie viel mus alsdan  $x$  sein? Antw. 7.

Wie viel bedeutet  $x$ , wenn  $x + 10 = 28 + 2$ ? Antwort: 20.

Wenn

## Erstes Kapitel. Anwendung 1c. 11

Wie viel, wenn  $x - 2 = 6$ ? Antw. 8.

Was für eine Zahl bedeutet  $y$ .

wenn  $y + 2 - 3 = 8 - 2 + 5$ ? Antw. 12.

wenn  $y - 5 = 20 - 8 - 2$ ? Antw. 15.

wenn  $3 + y = 12 - 3$ ? Antw. 6.

### §. 4.

Man pflegt das Zeichen (+) durch plus, und das Zeichen (—) durch minus auszusprechen; so daß man den Ausdruck,  $5 + 4 - 3 = 6$ , liest: 5 plus 4 minus 3 ist gleich 6.

### §. 5.

Wenn  $2x = 12$  (zweimal  $x$  gleich ist 12); so muß  $x$  sein? Antw. 6.

In  $3x = 12$ , ist  $x$ ? Antw. 4. Demnach ist

in  $6x + 2 = 50$ ,  $x = 8$ .

in  $5x - 3 = 32$ ,  $x = 7$ .

### §. 6.

#### I. Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt 3 Söhne, und ein Vermögen von 1200 Rthlr. Nach seinem Testamente soll der zweite Sohn 150 Rthlr. mehr bekommen, als der erste; der dritte Sohn wieder 150 Rthlr. mehr, als der zweite. Wie viel bekommt ein jeder?

### §. 7.

## §. 7.

## Auflösung.

Man setze, es bekomme der erste Sohn  $x$  thl. so mus erhalten  
 der zweite Sohn  $x$  thl. + 150 thl. und  
 der dritte Sohn  $x$  thl. + 300 thl. diese Erbtheile der 3  
 Söhne zusammen —————  
 addirt, geben  $3x$  thl. + 450 thl. Nun ist aber das  
 Erbtheil aller 3 Söhne gleich der ganzen Ver-  
 lassenschaft; also ist  $3x + 450 = 1200$ .

Wenn ich jetzt in dieser Gleichung die 450 Rthlr.  
 von der linken Seite wegnehme; so wird die rechte  
 Seite um 450 Rthlr. größer bleiben, als die linke  
 Seite. Um also beide Seiten wieder gleich zu  
 machen, darf ich nur auch von der rechten Seite  
 450 Rthlr. abziehen. Alsdan erhalten wir.

$3x = 750$ , das ist, dreimal  $x$  ist gleich 750.  
 Folglich mus 1.  $x$  der dritte Theil sein von 750, das  
 ist,  $\frac{750}{3} = 250$ , und es becomt

der erste Sohn  $x$ , das ist, 250 Rthlr.

der zweite Sohn  $x + 150$ , d. i. 400 Rthlr.

der dritte Sohn  $x + 300$ , d. i. 550 Rthlr.

Welche drei Erbtheile zusammen genommen das  
 ganze Vermögen von 1200 Rthlr. geben.

## §. 8.

## Anmerkung.

Ein jeder Ausdruck, wie dieser:  $3x + 450 = 1200$ ,  
 oder  $3x + 4 - 2 = 4 + 9 - 2x + 20$  heist eine  
 Gleichung;

## Anwend. der ersten Grundsätze. 13

Gleichung; weil dadurch angedeutet wird, daß alle Größen, welche auf der linken Seite vor dem Zeichen der Gleichheit (=) stehen, zusammen genommen eben so viel geben, als alle Größen auf der rechten Seite hinter dem Gleichheitszeichen zusammen genommen. In folgender Gleichung:

$$4x - 2x + 6 - 20 = 6x + 3 + 48$$

hat die linke Seite vier, die rechte Seite drei Glieder: denn eine jede Größe, welche von der nebenstehenden durch die Zeichen + oder — getrennt ist, heist ein Glied.

### §. 9.

Diejenigen Glieder, welche das Zeichen + vor sich haben, heißen positive, diejenigen hingegen, welche das Zeichen — vor sich haben, negative Glieder. Wenn das erste Glied in einer Seite gar kein Zeichen vor sich hat; so ist es ein positives Glied.

### §. 10.

## II. Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt drei Söhne und eine Tochter. Diese sollen sich in einem Vermögen von 2800 Rthlr. dergestalt theilen, daß der älteste Sohn 100 Rthlr. mehr bekommt, als der zweite; der zweite Sohn 200 Rthlr. mehr, als der Dritte, und der Dritte Sohn 300 Rthlr. mehr, als die Tochter. Wie viel Rthlr. bekommt ein jedes Kind?

### §. 11.

## §. 11.

## Auflösung.

Man setze:

das Erbtheil der Tochter sei  $= x$  Rthlr. so ist  
 das Erbtheil des dritten Sohnes  $= x + 300$   
 das Erbtheil des zweiten Sohnes  $= x + 300 + 200$   
 und das Erbtheil des ersten Sohnes  $= x + 300$   
 $+ 200 + 100.$

Diese vier Erbtheile zusammen genommen betragen demnach

$x + x + 300 + x + 300 + 200 + x + 300 + 200 + 100,$   
 oder kürzer geschrieben:  $4x + 1400.$  Da nun  
 alle 4 Erbtheile nothwendig dem ganzen Vermögen  
 gleich sein müssen; so mus  $x$  gerade so genommen  
 werden, daß  $4x + 1400 = 2800$  wird, folglich mus  
 sein  $4x = 1400$

und  $x = \frac{1400}{4} = 350.$

4

Also bekömmt die Tochter 350 Rthlr. der dritte Sohn  
 650 Rthlr. der zweite 850 Rthlr. und der älteste  
 Sohn 950 Rthlr.

## §. 12.

## III. Aufgabe.

Eine Witwe sol sich mit ihren 2 Söhnen und  
 3 Töchtern in einem Vermögen von 11500 Rthlr.  
 dergestalt theilen, daß ein Sohn 100 Rthlr. mehr,  
 als eine Tochter, die Witwe selbst aber so viel, als  
 alle 5 Kinder zusammen, und noch so viel, als ein  
 Sohn

## Anwend. der ersten Grundsätze. 15

Sohn erhalte. Wie viel mus jedem Sohne, wie viel ieder Tochter, und wie viel der Witwe gegeben werden.

§. 13.

### Auflösung.

Eine Tochter erhalte  $x$  Rthlr. so bekommen  
die 3 Töchter zusammen  $3x$  Rthlr.

Ein Sohn bekommt alsdan  $x + 100$   
und die beiden Söhne zusammen  
also  $x + 100 + x + 100$ , das ist,  
kürzer geschrieben, —  $2x + 200$  Rthlr.

Die Witwe erhält nun erstlich so  
viel, als alle Kinder zusammen,  
welches  $5x + 200$  rthlr. beträgt,  
und dazu noch so viel als ein  
Sohn. nämlich  $x + 100$  rthlr.  
also überhaupt  $5x + 200 + x + 100$ ,  
kürzer geschrieben —  $6x + 300$  Rthlr.

Da nun die Summe aller dieser  
Erbtheile beträgt —  $11x + 500$  Rthlr.

so mus  $x$  gerade so groß angenommen werden, daß  
 $11x$  Rthlr.  $+ 500$  Rthlr.  $= 11500$  Rthlr. oder  
überhaupt  $11x + 500 = 11500$  sei. Wenn dis  
sein sol, so mus nothwendig  $11x = 11000$  (das ist  
Eilsmal  $x = 11000$ ), also offenbar  $1.x = 1000$   
sein. Demnach bekomt

eine

eine Tochter 1000 Rthlr. daher die		
3 Töchter zusammen	—	3000 Rthlr.
ein Sohn 1100 Rthlr. daher die		
2 Söhne zusammen	—	2200 Rthlr.
die Witwe also 5200 Rthlr. und noch		
1100 Rthlr. macht	—	6300 Rthlr.
Dis zusammen genommen, glebt		<hr/>
richtig	—	11500 Rthlr.

§. 14.

## IV. Aufgabe.

Eine Schuld von 4675 Rthlr. sol zu vier Terminen bezahlt werden, und zwar auf den zweiten Termin noch einmal so viel, als auf den ersten, und noch 100 Rthlr. auf den dritten, anderthalb mal so viel, als auf den zweiten; auf den vierten anderthalb mal so viel, als auf den dritten. Wie viel Rthlr. müssen an jedem Termine bezahlt werden?

§. 15.

## Auflösung.

Wenn gezahlt werden

A. am ersten Termine  $x$  thlr. so müssen gezahlt werden

B. am zweiten —  $2x + 100$

C. am dritten —  $2x + 100 + x + 50$

D. am vierten —  $2x + 100 + x + 50 + x + 50 + \frac{x}{2} + 25$

An allen vier Terminen zusammen  $10x + \frac{x}{2} + 475$

Wenn ich nun für  $x$  eine solche Zahl annehme, daß  $10x + \frac{x}{2} + 475$  gerade gleich wird 4675, oder welches



## Anwend. der ersten Grundsätze. 17

welches einerlei ist, daß folgende Gleichung  $10x + \frac{x}{2} + 475 = 4675$  wirklich richtig ist; so können durch diesen Werth von  $x$  alle Forderungen der Aufgabe erfüllt werden.

Denn es kan offenbar die Summe  $10x + \frac{x}{2} + 475$  wieder in die vier Theile aufgelöst werden, aus welchen sie zusammengesetzt ist, und welche nach einander in den vier Reihen, A, B, C, D angegeben sind. In diesen vier Reihen aber sind die an den vier Terminen auszahlenden Theile gerade so angegeben, wie es in der Aufgabe verlangt wird, daß nämlich am zweiten Termin noch einmal so viel, als am ersten und noch 100 Rthlr. am dritten anderthalbmal so viel, als am zweiten zc. angesetzt ist. Wenn ich daher in allen diesen vier Reihen für jedes  $x$  den zur Richtigkeit der Gleichung  $10x + \frac{x}{2} + 475 = 4675$  erforderlichen Werth desselben schreibe; so wird nicht nur die Eintheilung der Zahlungsgelder in den vier Terminen nach den Forderungen der Aufgabe richtig gemacht, sondern auch die Summe von allen diesen vier Theilen gerade die verlangte Zahl von 4675 Rthlr. sein.

Wir sagen also: es muß  $x$  gerade so angenommen werden, als es diese angeetzte Grundgleichung

gleichung erfordert. Nun können wir aber offenbar weiter schließen, daß wenn

$10x + x + 475 = 4675$ , oder welches einerlei ist (\*),  $21x + 475 = 4675$  sein sol, ganz nothwen-

dig  $21x = 4200$  sein müsse. Sol aber diese

Gleichung richtig, das ist, die linke Seite einmal genommen der rechten Seite einmal genommen gleich sein; so muß offenbar auch die linke Seite derselben zwei mal genommen der rechten Seite zwei mal genommen gleich bleiben, also auch

$42x = 8400$ , oder welches einerlei ist,

$21x = 8400$  sein. Wenn dis sein sol, so muß ferner nothwendig  $x$  der einundzwanzigste Theil von 8400, also  $x = \frac{8400}{21} = 400$  sein.

§. 16.

Antwort: Es wird bezahlt  
 am ersten Termin  $x$  Rthlr.  $= 400$  Rthlr.  
 am zweiten  $2x + 100 = 900$  —  
 am dritten  $2x + 100 + x + 50 = 1350$  —  
 am vierten  $2x + 100 + x + 50$   
 $+ x + 50 + x + 25 = 2025$  —

Diese 4 Theile geben zusammen genommen 4675 Rthlr. und

(\*) Denn es ist  $10x$  (zehnmal ganz  $x$ ) offenbar so viel als  $20x$  (20 mal halb  $x$ ).

## Anwend. der ersten Grundsätze. 19

und es ist auch ferner, wie verlangt wurde,  $900 =$  zweimal  $400$  und noch  $100$  Rthlr.  $1350 =$  anderthalbmal  $900$ , und  $2025 =$  anderthalbmal  $1350$ .

### §. 17.

Der Ausbruch  $4 \cdot 8 = 32$ , oder  $4 \times 8 = 32$ , wird gelesen 4 mal 8 ist gleich 32. Daher die beiden Zeichen  $(\cdot)$  oder  $(\times)$  Multiplicationszeichen heißen, welche allemal anzeigen, daß die beiden Zahlen, zwischen welchen eines von beiden steht, multiplicirt werden sollen, gerade so, wie der auch in der gemeinen Arithmetik gewöhnliche Divisions-Strich, z. B. in  $\frac{8}{2}$ , anzeigt, daß die 8 durch die 2 zu dividiren sei.

Daß  $5x$  nichts anders heißen könne, als 5 mal  $x$ , und daß  $x$  so viel sei, als  $1 \cdot x$ , versteht sich von selbst.

### §. 18.

Der Ausbruch,  $3 \cdot (x - 2)$  oder  $3 \times (x - 2)$  oder auch  $3(x - 2)$  bedeutet, daß die ganze GröÙe, welche in den beiden Klammern eingeschlossen ist, durch 3 multiplicirt, das ist, dreimal genommen werden sol. Es wird daher sein

$$\begin{aligned} 3(x - 2) &= x - 2 + x - 2 + x - 2, \\ \text{oder } 3(x - 2) &= x + x + x - 2 - 2 - 2, \\ \text{oder } 3(x - 2) &= 3x - 6 = 3x - 3 \cdot 2. \end{aligned}$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} 4(x - 2 + 5) &= x - 2 + 5 + x - 2 + 5 + x - 2 + 5 \\ &\quad + x - 2 + 5, \\ \text{oder } 4(x - 2 + 5) &= 4x - 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5. \end{aligned}$$

W 2

### §. 19.

## §. 19.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: Wenn vor einer Parenthese eine Zahl als Multiplikator der ganzen Parenthese geschrieben ist, und man wil die Parenthese wegschaffen, oder unverwickelt (explicite) multipliciren: so mus ein jedes Glied dieser Parenthese einzeln durch diese Zahl multiplicirt werden.

## §. 20.

Man kan sich von der Richtigkeit dieser Regel auch auf folgende Weise überzeugen.

$3 \cdot (8 + 2)$  ist eigentlich so viel, als  $3 \cdot (10)$ , folglich mus  $3 \cdot (8 + 2) = 30$  sein: nun ist aber auch  $3 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 24 + 6 = 30$ .

Eben so ist  $5 (9 - 3)$  eigentlich  $5 \cdot (6)$ , daher mus  $5 (9 - 3) = 30$  sein; es ist aber auch  $5 \cdot 9 - 5 \cdot 3 = 45 - 15 = 30$ .

## §. 21.

Umgekehrt kan man also auch wieder einen mehren Gliedern gemeinschaftlichen Faktor herausziehen, und z. B.

stat  $3 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2$  schreiben  $3 \cdot (8 - 6 + 2)$

stat  $5 \cdot x - 2 x$  schreiben  $(5 - 2) x$

stat  $3 x - x$  schreiben  $(3 - 1) x$ ;

indem  $3 x - x$  so viel ist, als  $3 x - 1 \cdot x$ . Und wenn ich in dem Ausdrucke  $(3 - 1) x$  unverwickelt multiplicire nach §. 19; so komt wieder  $3 x - 1 \cdot x$ .

## §. 22.

## Anwend. der ersten Grundsätze. 21

### §. 22.

Der Ausdruck  $\underline{8 + 4 + 6}$  zeigt an, daß man die drei Glieder, welche <sup>2</sup>über dem Divisionsstrich stehen, zusammengenommen durch 2 dividiren solle. Es ist also  $\underline{8 + 4 + 6} = \frac{1}{2}^2 = 9$ .

Hieraus erhellet also, daß der Divisionsstrich mehrere Zahlen zu einer gemeinschaftlichen Division eben so verbindet, wie es die Einschließungsclammernach §. 19. zu einer gemeinschaftlichen Multiplikation thun.

Es ist ferner auch leicht einzusehen, daß man nun auch in jedes Glied einzeln oder explicite dividiren könne, und daß  $\underline{8 + 4 + 6} = \frac{8}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2}$

sein müsse; wovon wir uns durch folgende Betrachtung überzeugen können. Die drei Glieder,  $8 + 4 + 6$ , machen zusammengenommen die Zahl 18 aus. Wenn ich nun eine gewisse Zahl in drei Theile, wie hier die Zahl 18, in die drei Theile 8, 4, 6 zerlege, und von jedem dieser Theile die Hälfte nehme; so müssen diese drei Hälften aller drei Theile zusammengenommen, die Hälfte des Ganzen, die Hälfte der Zahl 18 geben.

Es hindert uns nichts, auch in folgendem Ausdrücke  $\overset{3}{12 - 3 + 6}$  die drei Glieder,  $12 - 3 + 6$ ,

als drei Theile zu betrachten, in welche die Zahl 15 zerlegt ist: denn diese drei Glieder machen ja zusammen genommen die Zahl 15 aus. Es wird daher auch  $\overset{3}{12 - 3 + 6} = \frac{1}{3}^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$  sein.

Eben so mus auch

$$\overset{4}{4x - 8 + 12} = \overset{4}{4x} - \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = x - 2 + 3 \text{ sein.}$$

§. 23.

### V. Aufgabe.

Es hat jemand eine Zahl in Gedanken. Nachdem er 1) dazu 5 addirt; 2) diese Summe durch 4 multiplicirt; 3) von diesem Produkte 8 abgezogen; und 4) den Rest durch 4 dividirt hat; so komt die Zahl 15: was für eine Zahl hat er in Gedanken gehabt?

§. 23.

### Auflösung.

Die Zahl sei  $x$ : dazu 1) 5 addirt, giebt  $x + 5$ ; diese Summe 2) durch 4 multiplicirt, giebt  $4(x + 5)$  oder  $4x + 20$ ; davon 3) 8 abgezogen, bleibt  $4x + 12$ ; diese Differenz endlich 4) durch 4 dividirt, giebt  $\frac{4x + 12}{4}$  oder  $x + 3$ . Nun ist

in der Aufgabe gesagt, daß nach allen diesen Operationen

## Anwend. der ersten Grundsätze. 23

rationen zuletzt 15 herausgekommen sei. Mit der Zahl  $x$  haben wir alle die nämlichen Operationen gemacht, welche der andere mit der ausgedachten gemacht hat. Nehmen wir also  $x$  dergestalt an, daß  $x + 3 = 15$ , so giebt der für  $x$  angenommene Werth eine Zahl, welche nach allen den vier angegebenen Operationen 15 hervorbringt. Es kan aber  $x + 3 = 15$ , nicht anders sein, als wenn  $x = 12$  angenommen wird; folglich ist 12 die ausgedachte Zahl.

Hätte der andere, nachdem er alle die angegebenen Operationen vorgenommen, 20 herausgebracht, so müste, wenn wiederum  $x$  die ausgedachte Zahl bedeutet,  $x + 3 = 20$  daher  $x = 17$  sein.

§. 24.

### VI. Aufgabe.

In einer Gesellschaft von 4 Personen hatte sich ein jeder für sich eine Zahl ausgedacht. Nachdem ein jeder 1) zu seiner Zahl addirt hatte 10; diese Summe 2) multiplicirt durch 6; von diesem Produkte 3) abgezogen 30, und den bleibenden Rest 4) dividirt durch 3; so hatte die erste Person 18, die andere 16, die dritte 10, und die vierte 12. Welche Zahl hatte sich jeder ausgedacht?

§. 25.

### Auflösung.

Man nehme eine Zahl  $x$ . Was für eine Zahl auch dieses  $x$  bedeuten mag, so wird doch, wenn 1) 10 dazu addirt wird, die Summe sein  $x + 10$ , diese

diese Summe 2) durch 6 multiplicirt, geben  $6x + 60$ ; davon 3) 30 abgezogen, bleiben  $6x + 30$ ; und dies 4) durch 3 dividirt herauskommen  $2x + 10$ . Wenn nun  $x$  die Zahl der ersten Person bedeuten sol, so mus sein  $2x + 10 = 18$ , daher mus sein  $2x = 8$ , und ein  $x$ , die Zahl der ersten Person,  $= 4$ .

Sol  $x$  die Zahl der zweiten Person bedeuten, so mus sein  $2x + 10 = 16$ , daher sein  $2x = 6$ , und  $x = 3$ .

Für die dritte Person ist  $2x + 10 = 12$ , daher  $2x = 2$ , und  $x = 1$ .

Auch folgende ähnliche Uebung kan für Anfänger angenehm und nützlich sein.

#### §. 26.

Nachdem sich jemand 2 Zahlen ausgedacht, und neben einander die eine zur linken, die andere zur rechten geschrieben hat; so lasse man ihn 1) zu beiden Zahlen 4 addiren; 2) darauf eine jede von diesen beiden Summen durch 3 multipliciren; 3) das, was nun auf der linken Seite steht, zu demjenigen, was jetzt auf der rechten steht, addiren; 4) zu der Zahl, die in der linken Kolonne steht, 12 addiren; darauf 5) in beiden Kolonnen durch 3 dividiren, und noch 6) zu der untersten Zahl in der linken Kolonne diejenige ausgedachte Zahl, welche man zur rechten geschrieben hat, addiren: so wird nun in beiden Kolonnen einerlei Zahl stehen; so verschieden auch die beiden Zahlen sein mögen, welche man sich anfangs ausgedacht hat.

#### §. 27.



## §. 27.

Denn wenn diese beiden ausgedachten Zahlen  $x$  und  $y$ , genant werden, so werden wir durch die vorgeschriebenen Operationen nach und nach erhalten:

1)  $x + 4$ ,  $y + 4$   
 nach 2)  $3x + 12$ ,  $3y + 12$   
 nach 3)  $\dots$ ,  $3y + 3x + 24$   
 nach 4)  $3x + 24$ ,  $\dots$   
 nach 5)  $x + 8$ ,  $y + x + 8$   
 nach 6)  $x + y + 8$ ,  $y + x + 8$ . Nun muß aber nothwendig sein  $x + y + 8 = y + x + 8$ , was auch  $x$  und  $y$  für Zahlen sein mögen.

## §. 28.

### VII. Aufgabe.

Ich habe 3 Zahlen: 1) Die beiden ersten zusammenaddirt geben 10; 2) die Summe der zweiten und dritten, ist 28; 3) die Summe der dritten und ersten ist 24. Welches sind die 3 Zahlen?

## §. 29.

### Auflösung.

Die erste sei  $x$ , die zweite  $y$ , die dritte  $z$ ; so ist nach der Aufgabe

$$1) \quad x + y = 10$$

$$2) \quad y + z = 28$$

$$3) \quad x + z = 24$$

Also  $2x + 2y + 2z = 62$ , oder, den gemeinschaftlichen Factor 2 herausgezogen (§. 21.)

$$2(x + y + z) = 62,$$

2 5

daßer

daher mus sein  $x + y + z = 31$  (einmal  $(x + y + z)$   
gleich halb 62)

und nun bleibt, da  $x + y = 10$ , für  $z$  übrig 21,

und, da  $y + z = 28$ , für  $x$  übrig 3,

und, da  $x + z = 24$ , für  $y$  übrig 7.

Und es ist, wie verlangt wurde,

$$3 + 7 = 10, 7 + 21 = 28, 3 + 21 = 24.$$

§. 30.

### VIII. Aufgabe.

Es werden vier Zahlen gesucht, welche so beschaffen sind, daß 1) die Summe der drei ersten ist  $= 53$ , 2) die Summe der drei letztern ist  $= 86$ , 3) die Summe der beiden letzten und der ersten  $= 67$ , 4) die Summe der letzten und der beiden ersten  $= 58$ .

§. 31.

### Auflösung.

Wir wollen diese vier noch unbekannten Zahlen der Ordnung nach bezeichnen durch  $x, y, z, u$ ; so ist

$$1) x + y + z = 53$$

$$2) y + z + u = 86$$

$$3) z + u + x = 67$$

$$4) u + x + y = 58$$

---


$$\text{daher } 3x + 3y + 3z + 3u = 264$$

$$\text{oder } 3(x + y + z + u) = 264$$

$$\text{oder } 3(x + y + z + u) = 3 \cdot 88, \text{ indem } 3 \cdot 88 = 264.$$

$$\text{daher } x + y + z + u = 88$$

Nun

## Anwend. der ersten Grundsätze. 27

Nun ist  $x + y + z = 53$ , daher bleibt für  $u$  übrig 35

$$y + z + u = 86, \quad \text{---} \quad x \text{ ---} \quad 2$$

$$z + u + x = 67, \quad \text{---} \quad y \text{ ---} \quad 21$$

$$u + x + y = 58, \quad \text{---} \quad z \text{ ---} \quad 30$$

§. 32.

### IX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen finden, deren eine um 6 größer ist, als die andere, und welche beide zusammenaddirt 24 geben.

§. 33.

#### Auflösung.

Es sei die kleinere Zahl  $x$ , so beträgt die größere so viel, als  $x + 6$ , und die Summe dieser beiden Zahlen ist  $2x + 6$ . Da nun nach Forderung der Aufgabe die Summe dieser beiden Zahlen 24 sein soll; so muß  $x$  dergestalt angenommen werden, daß  $2x + 6 = 24$  werde. Wenn wir aber nun annehmen, daß diese Gleichung richtig, daß ist, in dieser Gleichung die linke Seite der rechten vollkommen gleich ist; so müssen beide Seiten ganz nothwendig auch alsdan noch gleich bleiben, wann wir von jeder Seite gleich viel, nemlich 6 abziehen, welches dadurch geschieht, daß wir auf beiden Seiten das Glied  $-6$  hinzusetzen. Es ist also auch

$$2x + 6 - 6 = 24 - 6,$$

das ist,  $2x = 24 - 6$ , indem  $+6 - 6$  offenbar 0 ist.

Sol

24

Sol aber diese Gleichung richtig, das ist,  $2x$  einmal genommen, gleich sein  $24 - 6$  einmal genommen; so mus auch die Hälfte der linken Seite gleich der Hälfte der rechten Seite,

$$\text{das ist, } \frac{2x}{2} = \frac{24 - 6}{2}$$

$$\text{oder } x = \frac{24 - 6}{2}$$

$$\text{das ist, } x = \frac{18}{2} = 9 \text{ sein.}$$

Antw. Die kleinere Zahl ist 9, die größere  $9 + 6$ , das ist 15.

§. 34.

### X. Aufgabe.

Man sol zwei Zahlen finden, wovon die eine um die Zahl  $a$  größer ist, als die andere, und welche beide zusammen genommen die Summe  $b$  geben.

§. 35.

### Auflösung.

Es sei die kleinere Zahl  $x$ , so beträgt die größere so viel als  $x + a$ , beide zusammen addirt geben also  $2x + a$ . Es mus also für  $x$  eine solche Zahl angenommen werden, daß  $2x + a = b$  werde. Sobald wir annehmen, daß diese Gleichung richtig ist; so müssen wir zugestehen, daß auch folgende  $2x + a - a = b - a$  noch richtig bleiben müsse; indem diese letztere von der ersten nicht weiter unterschieden ist, als daß man jede

Seite

## Anwend. der ersten Grundsätze. 29

um gleich viel, nämlich um die Zahl  $a$ , kleiner gemacht hat. Da nun  $+a$  und  $-a$  sich dergestalt aufheben, daß allemal  $+a - a = 0$  wird, was für eine Zahl auch  $a$  bedeuten mag; so haben wir, daß  $2x = b - a$  sein müsse. Folglich mus auch

$$\text{sein } \underline{2x = b - a}$$

$$\text{das ist, } \underline{\underline{x = \frac{b-a}{2}}}$$

§. 36.

Diese Formel  $x = \frac{b-a}{2}$  zeigt an, daß

man jedesmal die kleinere Zahl  $x$  erhalte, wenn man die gegebne Zahl  $a$ , um welche die eine gesuchte Zahl größer sein sol, als die andere, von der gegebenen Summe beider Zahlen ( $b$ ) abzieht, und das was übrig bleibt durch 2 dividirt.

Wenn z. B. wie in der vorigen Aufgabe, gegeben ist  $a = 6$  und  $b = 24$ , so wird

$$x = \underline{\underline{\frac{24 - 6}{2} = 9}}.$$

Wenn gegeben würde  $a = 4$ ,  $b = 30$ ; so wäre  $x = \underline{\underline{\frac{30 - 4}{2} = 13}}.$

§. 37.

### XI. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, wovon die eine um 10 größer ist, als die andere, und deren Summe  $= 40$ .

§. 38.

## §. 38.

## Auflösung.

Diese Aufgabe läßt sich nun nach der eben gefundenen Formel sogleich beantworten, ohne daß man eine neue Auflösung nöthig hat. Es wird nämlich in diesem Falle sein die kleinere gesuchte Zahl  $x = \frac{40 - 10}{2} = \frac{30}{2} = 15$ , folglich die größere 25.

## §. 39.

Der Ausdruck,  $\frac{a+b-8}{4}$ , zeigt an, daß die drei Zahlen, welche über den Divisionsstrich stehen, zusammen genommen, und von der ganzen Größe, welche durch diese Zusammennehmung entsteht, der vierte Theil genommen werden soll. Ich behaupte, daß  $\frac{a+b-8}{4} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{2}{4}$  sei.

Denn wenn ich eine Größe in drei Theile zertheile, und von jedem dieser Theile das Viertel nehme; so müssen alle diese Viertel zusammen genommen den vierten Theil der ganzen Größe geben. Eben so ist auch  $\frac{m-n+5+b}{5} = \frac{m}{5} - \frac{n}{5} + \frac{1}{5} + \frac{b}{5}$ .

Umgekehrt kan ich also auch stat  $\frac{x}{5} + \frac{nx}{5}$  allemal schreiben  $\frac{x+nx}{5}$ .

## §. 40.

§. 40.

XII. Aufgabe.

Ich kam mit einem Korbe vol. Äpfel unter einem Haufen von Kindern, die ich nicht überzählt hatte. Nachdem ich von meinen ebenfalls nicht gezählten Äpfeln einem jeden Kinde 6 Äpfel gegeben hatte, so behielt ich nur 12 Äpfel übrig. Ich ließ mir darauf alle Äpfel zurück geben, und gab nun jedem Kinde nur 4 Äpfel, da behielt ich 44 Äpfel übrig. Wie viel Äpfel habe ich gehabt, und wie viel Kinder waren da?

§. 41.

Auflösung.

Man setze, die Anzahl der Kinder sei  $= x$ ; so brauche ich 6 mal  $x$  Äpfel, um jedem Kinde 6, und 4 mal  $x$  Äpfel, um jedem Kinde 4 Äpfel zu geben. Daher ist

$6x + 12 =$  der Anzahl meiner Äpfel,  
und auch  $4x + 44 =$  der Anzahl meiner Äpfel.

Daraus folgt offenbar,

daß  $6x + 12 = 4x + 44$ , und von beiden Seiten 12 abgezogen, daß  $6x = 4x + 32$ , ferner, von beiden Seiten noch  $4x$  abgezogen, daß  $2x = 32$ , folglich  $1 \cdot x = 16$ .

Kennt man nur erst die Anzahl der Kinder, so läßt sich leicht auch die Anzahl der Äpfel angeben; sie ist nämlich  $6 \cdot 16 + 12$ , das ist, 108, oder auch  $4 \cdot 16 + 44$ , welches ebenfalls 108 giebt.

§. 42.

## §. 42.

Solche Sätze, welche man sogleich für wahr erkennt, sobald man nur versteht, was sie sagen sollen, und welche nicht aus andern Sätzen, deren Wahrheit man noch deutlicher einseht, erwiesen werden können, heißen Grundsätze. Dahin gehören folgende:

## §. 43.

## Grundsatz.

Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind; so sind sie einander selbst gleich.  
z. B.

Wenn Karl so groß ist, als Frize, und August auch so groß ist, als Frize; so müssen auch Karl und August gleich groß sein.

Alle Handwerker arbeiten nach diesem Grundsatz. Der Schuster wendet ihn wenigstens zweimal an, wenn er einen Schuh für einen Fuß macht; denn er mus nothwendig von folgenden Sätzen und Schlüssen überzeugt sein.

Die Form des Fußes ist = der durch meine Maaße bestimmten Form.

Die Form des Leists ist = der durch meine Maaße bestimmten Form.

---

Also



## Anwend. der ersten Grundsätze. 33

Also ist die Form  
des Fußes = der Form des  
Leistens.

Wird nun die Form  
des Schuhs = der Form des Leistens  
gemacht;

---

so muß die Form  
des Fußes = der Form des Schuhs  
sein.

Nach diesem Grundsatz schlossen wir in der vorigen Aufgabe, daß die beiden Größen  $6x + 12$ , und  $4x + 44$  einander gleich sein müßten, weil jede von ihnen gleich war einer dritten Größe, nämlich der Anzahl meiner Äpfel.

§. 44.

### XIII. Aufgabe.

Ich hatte Geld, weiß aber nicht wie viel; indessen fehlten mir 12 Gr. um in einer Gesellschaft jeder Person 6 Gr. zu geben. Nachdem ich aber jeder Person nur 4 Gr. gegeben hatte; so blieben mir 2 Gr. übrig. Wie viel Personen waren in der Gesellschaft, und wie viel Groschen hatte ich?

§. 45.

### Auflösung.

Die Anzahl der Personen sei  $x$ ; so brauche ich, um jeder Person 6 Gr. zu geben, 6 mal  $x$  Gr. War nun  $6x$  Gr. gleich meinem Gelde? das nicht; sondern

sondern

Groschen

es war 1)  $6x - 12 =$  der Anzahl meiner Groschen

Groschen

und auch 2)  $4x + 2 =$  der Anzahl meiner Groschen

Daraus folgt offenbar, daß  $6x - 12 = 4x + 2$ .

Wenn wir in dieser Gleichung von beiden Seiten  $+ 4x$  abziehen, oder wie man auch in der Algebra zu reden pflegt, das Glied  $- 4x$  zu beiden Seiten hinzusetzen; so müssen notwendig auch nach diesem gleichen Abzuge beide Seiten noch gleich bleiben, wenn sie es vor diesem Abzuge waren. Also haben wir

$$6x - 4x - 12 = 4x - 4x + 2;$$

oder da  $6x - 4x$  so viel als  $2x$

und  $4x - 4x = 0$  ist,

folgende Gleichung

$$2x - 12 = 2.$$

Setzen wir nun ferner, um das Glied  $2x$  allein auf der linken Seite zu haben, zu beiden Seiten  $+ 12$  hinzu; so müssen beide Seiten auch nach diesem gleichen Zusätze gleich bleiben, wenn sie es vor diesem Zusätze waren, und wir haben

$$\text{daß } 2x - 12 + 12 = 2 + 12$$

$$\text{oder } 2x = 14$$

$$\text{daher } x = 7.$$

Antwort:

## Anwend. der ersten Grundsätze. 35

Antwort: Es waren 7 Personen. Um die Anzahl meiner Groschen zu erhalten, darf ich nur in einer von den beiden ersten Gleichungen bei 1) oder 2) stat  $x$  den gefundenen Werth 7 schreiben. Nach der Gleichung bei 2), wonach  $4x + 2 =$  der Anzahl der Groschen, erhält man dadurch, daß  $4 \cdot 7 + 2 = 30$  die Anzahl meiner Groschen sei. Man sieht es auch ohne Mühe ein, daß mir bei 30 Gr. 1) gerade 12 Gr. fehlten, um einer jeden von 7 Personen 6 Gr. zu geben, wozu ich  $6 \cdot 7$ , das ist, 42 Gr. gebraucht hätte; und daß ich 2) 2 Gr. übrig behalten mußte, wenn ich einem jeden nur 4 Gr. gab, wozu ich nicht mehr als  $4 \cdot 7 = 28$  Gr. nöthig hatte.

### §. 46.

Wir wollen uns nun bemühen, noch einige von denen Grundsätzen zu entwickeln, wonach wir in der vorhergehenden Auflösung geschlossen haben. Wir sagten z. B. wenn  $2x - 12 = 2$ , so ist ganz gewis auch  $2x - 12 + 12 = 2 + 12$ , indem wir zu beiden Seiten gleich viel, nämlich 12 hinzugesetzt haben; und man wird gewis kein Bedenken tragen, die allgemeine Wahrheit des folgenden Satzes einzugestehn.

### §. 47.

#### Grundsatz.

Wenn zu einer jeden von zweien gleichen Größen gleich viel addirt wird; so  
C 2 sind

## 36 Erstes Kapitel.

sind auch die beiden dadurch entstehenden Summen zueinander gleich.

$$\text{z. B. Da } 8 = 5 + 3 \\ \text{und } 5 = 4 + 1$$

so wird auch  $8 + 5 = 5 + 3 + 4 + 1$  sein.

$$\text{Wenn } y = m + n \\ \text{und } x = 2y + a$$

so wird auch  $x + y = 2y + a + m + n$  sein.

§. 48.

Grundsatz.

Gleiches von gleichem abgezogen, läßt gleiche Reste; das ist, wenn von zwei gleichen Größen gleich viel abgezogen wird; so muß von beiden Größen gleich viel übrig bleiben.

$$\text{z. B. Da } 7 + 3 = 6 + 4 \\ \text{und } 3 = 3$$

so muß auch  $7 + 3 - 3 = 6 + 4 - 3$   
das ist  $7 = 6 + 4 - 3$  sein.

$$\text{Wenn } a = 6 \\ \text{und } b = 2$$

so wird auch  $a - b = 4$  sein.

§. 49.

So wie  $2x$  gelesen wird 2 mal  $x$ , eben so bedeutet auch  $a \cdot x$  so viel, als  $a \cdot x$ , oder  $a \times x$ , das ist,  $a$  mal  $x$ , und überhaupt sind alle Zahlen, welche ohne

## Anwend. der ersten Grundsätze. 37

ohne irgend ein Zeichen neben einander geschrieben sind, als Faktoren anzusehen, dergestalt, daß  $p \cdot q \cdot r$  so viel ist, als  $p \cdot q \cdot r$ , oder  $p \times q \times r$ , das ist,  $p$  mal  $q$  mal  $r$ . Will man aber z. B. schreiben 2 mal 3, so muß man das Zeichen nicht vergessen, sondern schreiben 2. 3, oder 2  $\times$  3, indem wegen der bekannten Decimalordnung 23 so viel bedeutet, als 20 + 3.

### XIV. Aufgabe

Es fehlen mir  $b$  Groschen, um in einer gewissen Gesellschaft einem jeden  $a$  Gr. geben zu können; es bleiben mir aber  $d$  Gr. übrig, wenn ich einem jeden nur  $c$  Gr. gebe. Wie viel Personen waren da, und wie viel Groschen hatte ich?

$$d + b = 51. \quad x = \text{?}$$

### Vorbereitung

Wenn  $x$  Personen vor mir stehen, und ich will jeder Person 4 Gr. geben, so brauche ich für alle  $x$  Personen?

Antwort:  $4x$  (4 mal  $x$  Gr.)

Wenn ich jedem geben will 1 Gr. so brauche ich?

Antwort:  $x$  (einmal  $x$  Gr.)

Wenn ich jedem geben will 6 Gr. so brauche ich?

Antwort:  $6x$  (das ist, sechsmal  $x$  Gr.)

Wenn ich jedem geben will  $a$  Gr. so brauche ich?

Antwort:  $ax$  (das ist,  $a$  mal  $x$  Gr.)

Wenn ich jedem geben will  $c$  Gr. so brauche ich?

Antwort:  $cx$  (das ist,  $c$  mal  $x$  Gr.)

Um jedem zu geben  $x$  Gr. würde ich brauchen?

Antwort:  $xx$  (das ist,  $x$  mal  $x$  Gr.)

§. 52.

## Auflösung.

Demnach ist 1)  $ax - b = z$ , wenn  $z$  die Anzahl mehr und auch 2)  $cx + d = z$  ner Gr. bedeutet.

Also ist (§. 43.)  $ax - b = cx + d$ . Diese Gleichung mus (§. 48.) noch richtig bleiben, wenn ich von beiden Seiten  $cx$  abziehe, oder welches immer sei ist, das Glied  $-cx$  zu beiden Seiten hinzuschreibe; dadurch erhalten wir

$$ax - cx - b = cx - cx + d, \text{ das}$$

ist  $ax - cx - b = d$ : zu beiden Seiten  $+b$  addirt, bleibt

$$\text{ferner (§. 47.) } ax - cx - b + b = d + b$$

$$\text{das ist } ax - cx = d + b$$

$$\text{oder } (a - c)x = d + b. (*)$$

Wenn nun jetzt die ganze linke Seite der ganzen rechten Seite gleich ist; so mus auch der zweite, dritte . . .  $(a - c)$ te Theil der linken Seite, dem zweiten, dritten . . .  $(a - c)$ ten Theil der rechten Seite gleich sein

$$\text{das ist } \frac{(a - c)x}{a - c} = \frac{d + b}{a - c}$$

Wie

(\*) Denn es ist  $ax - cx = (a - c)x$ , eben so wie §. 21. gezeigt worden,

$$\text{daß } 5x - 2x = (5 - 2)x.$$

## Anwend. der ersten Grundsätze. 39

Wie nun aber ist  $\frac{3 \cdot 4}{3} = 4$ ,  $\frac{5 \cdot 8}{5} = 8$ ,  
 $\frac{6 \cdot x}{6} = x$ ; so ist auch  $\frac{(a - c) x}{a - c} = x$ ; und so

können wir demnach schreiben,

$$\text{daß } x = \frac{d + b}{a - c} \text{ set.}$$

### §. 53.

Diese Formel deutet an, daß die Zahl, um welche ich bei der ersten Vertheilung zu wenig hatte (die Zahl  $b$ ) zu derjenigen Zahl, welche angiebt, wie viel ich bei der zweiten Vertheilung übrig behielt (nämlich  $d$ ) addiren, und diese Summe durch die Differenz ( $a - c$ ) dividiren müsse, um  $x$ , das ist, die Anzahl der Personen zu finden.

Wenn wir z. B. die vorige XIII. Aufgabe, wo alle diese Zahlen in bestimmten Zahlen gegeben sind, mit dieser XIV. Aufgabe vergleichen; so sehen wir, daß in jener Aufgabe gesetzt wurde

$$a = 6, \quad b = 12, \quad c = 4, \quad d = 2.$$

Schreiben wir nun in der zuletzt herausgebrachten

Formel  $x = \frac{d + b}{a - c}$  diese bestimmte Zahlen 6, 12,

4, 2, stat der allgemeinen Zahlen  $a, b, c, d$ , so ergiebt sich die Zahl der Personen für die XIII. Auf-

$$\text{gabe} = \frac{2 + 12}{6 - 4} = \frac{14}{2} = 7.$$

Wäre gegeben  $a = 8$ ,  $b = 16$ ,  $c = 3$ ,  $d = 19$ ;

so wäre  $x = \frac{16 + 19}{8 - 3} = \frac{35}{5} = 7$ .

Für  $a = 7$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 12$ , fomt  
 $x = \frac{12 + 2}{7 - 3} = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}$ ; also müßten dritte-

halb Personen da gewesen sein, wo die halbe Person nichts anders bedeuten kan, als eine Person, welche nur halb so viel als eine jede andere erhält.

§. 54.

Grundsatz.

Wenn zwei Größen einmal genommen  
 men gleich sind; so sind auch ihre Dupla,  
 Tripla, Quadrupla, ic. einander gleich.  
 Z. B.

Wenn  $x = a + b$ .

so ist auch  $2x = 2(a + b) = 2a + 2b$

auch  $3x = 3(a + b) = 3a + 3b$

überhaupt auch  $nx = n(a + b)$ , was auch  $n$  für  
 eine Zahl bedeuten mag.

§. 55.

Grundsatz.

Wenn zwei Größen einmal genommen  
 gleich sind; so sind auch die Hälften, die  
 Drittel, die Viertel, ic. dieser beiden Grö-  
 ßen einander gleich. Z. B.

Wenn



## Anwend. der ersten Grundsätze. 41

Wenn  $a y = a + b$

so ist auch  $\frac{2y}{2} = \frac{a+b}{2}$

auch  $\frac{2y}{3} = \frac{a+b}{3}$

und überhaupt  $\frac{ay}{n} = \frac{a+b}{n}$ , was auch  $n$  für

eine Zahl bedeuten mag.

### §. 56.

Nachdem man eine vorgelegte Aufgabe gehörig überdacht, und die darin gethanen Forderungen durch die festgesetzten Zeichen der vorzunehmenden Addition, Subtraktion, Multiplication und Division ausgedrückt und in eine Gleichung gebracht hat: so mus man darauf bedacht sein, aus dieser angelegten Grundgleichung, durch solche Veränderungen, wodurch die einmal festgesetzte Gleichheit beider Seiten nicht gestört wird, endlich eine Gleichung herzuleiten, worin der Werth der unbekannten Zahl durch die andern bekannten Zahlen angegeben und deutlich bestimmt wird. Diese Absicht wurde erreicht in der XN. Aufgabe, durch die letzte Gleichung  $x = b - a$ , in der letz-

tern XIV. Aufgabe durch die letzte Gleichung  $a = d + b$ , und wird offenbar allemal erreicht

durch eine solche Gleichung, deren eine Seite nur

die unbekannte Zahl, und deren andere Seite lauter bekannte Zahlen enthält.

## §. 57.

Wie man nun aus einer jeden Gleichung von der Art, wie wir sie fürs erste nur bestimmen werden, durch gehörige Veränderungen allemal eine solche Gleichung herleiten können, das wollen wir an folgender Gleichung bei A) lernen.

$$A) \quad bx + a - b = cf - ax + gx.$$

## §. 58.

Wir werden unserm Ziele näher gekommen sein, wenn wir

I) alle diejenigen Glieder, worinnen sich bloß bekannte Zahlen finden, von der einen Seite weggeschafft haben. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten  $-a + b$  hinzusetzen; so wird nach §. 47. noch bleiben

$$B) \quad bx + a - b = cf - ax + gx - a + b$$

$$\text{das ist C) } bx = cf - ax + gx - a + b$$

## §. 59.

Halten wir diese Gleichung bei C) mit der ersten bei A) zusammen; so fällt in die Augen, daß diese letztere bei C) aus der ersten bei A) hervorgebracht wird, wenn man das Glied  $+a$  von der linken Seite wegnimmt und mit entgegengesetztem Zeichen,

## Anwend. der ersten Grundsätze. 43

Zeichen, als  $-a$ , auf die rechte Seite schreibt, und eben so auch das Glied  $-b$  von der linken Seite wegnimmt, und mit entgegengesetzten Zeichen, als  $+b$ , auf die rechte Seite schreibt.

### §. 60.

Nachdem wir auf diese Weise alle Glieder von bloß bekannten Zahlen auf die rechte Seite gebracht haben; so werden wir die bekannten Zahlen von den unbekannten noch mehr dadurch absondern können, daß wir

II. Die unbekannten Glieder von der rechten Seite weg und auf die linke Seite hinbringen. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten der Gleichung bei C) die Glieder  $-2x + gx$  mit entgegengesetzten Zeichen als  $+2x - gx$  hinzusetzen; so werden nach diesem gleichen Zusätze nicht nur beide Seiten noch gleich bleiben, so, daß

$$D) \quad bx + 2x - gx = cf - 2x + gx - a + b$$

ist  $+2x - gx$

sondern es wird auch  $-2x + 2x + gx - gx = 0$ , folglich diese Gleichung bei D einerlei mit folgender sein

$$E) \quad bx + 2x - gx = cf - a + b$$

### §. 61.

Wenn wir mit der Gleichung bei C diese letztere bei E zusammen halten; so bemerken wir (wie §. 59.) daß auch hier die letztere Gleichung bei E aus

aus der vorhergehenden bei C entsteht, wenn in der ersten Gleichung bei C ein jedes unbekannte Glied von der rechten Seite weggestrichen und auf die linke Seite mit entgegengesetztem Zeichen geschrieben wird. Aus dieser und der §. 59 gemachten Bemerkung ergibt sich also folgende

### Allgemeine Regel.

#### §. 62.

Daß man in jeder Gleichung ein jedes beliebiges Glied von der einen Seite wegnimmt, und auf die andere mit entgegengesetztem Zeichen schreiben kan; ohne daß die Gleichheit der beiden Seiten dadurch aufgehoben wird.

#### §. 63.

Ist man durch Anwendung dieser Regel mit einer Gleichung so weit gekommen, daß sich alle Glieder, worinnen die unbekannte Zahl vorkommt, auf einer Seite, und alle übrigen bekannten Glieder auf der andern Seite befinden; so mus man ferner noch darauf bedacht sein,

III) alle diejenigen bekannten Zahlen, welche etwan noch als Faktoren oder Divisoren mit der unbekannten Zahl verbunden sind, durch eine gehörte Division oder Multiplikation ebenfalls von dieser Seite wegzubringen, welches allenthal geschehen kan, indem man z. B. auf folgende Art schließt:  
Wenn

## Anwend. der ersten Grundsätze. 45.

Wenn sein sol  $m x = a + q$ ; so mus auch

sein  $\frac{m x}{m} = \frac{a + q}{m}$  (§. 55.)

das ist  $x = \frac{a + q}{m}$  sein.

Oder: wenn  $\frac{x}{n} = r + s$  sein sol; so mus

auch  $\frac{n \cdot x}{n} = n(r + s)$  sein, (§. 54.)

das ist  $x = n(r + s)$  sein.

### §. 64.

Hätte aber die Gleichung nach Anwendung der §. 63. gegebenen Regel auf der einen Seite mehr als ein unbekantes Glied erhalten, wie es bei unserer zuletzt herausgebrachten Gleichung (§. 60.)

E)  $b x + 2 x - g x = c f + b - a$   
 der Fall ist; so kan nun allemal der allen dreien Gliedern gemeinschaftliche Factor, welches hier  $x$  ist, nach §. 21. herausgezogen, und stat der Gleichung bei G. folgender geschrieben werden:

F)  $(b + 2 - g) x = c f + b - a$

Nach dieser kleinen Veränderung des Ausdrucks besteht die linke Seite allemal aus zwei Factoren. Der eine ist die unbekannte Zahl, der andere enthält lauter bekante Zahlen. Man dividirt nunmehr durch diesen bekanten Factor, und schließt, daß wenn die Gleichung bei F richtig ist, oder  
 richtig

richtig sein sol, auch nach dieser Division sein

$$\text{müsse G) } \frac{(b + 2 + g) x}{b + 2 - g} = \frac{cf + b - a}{b + 2 - g},$$

$$\text{das ist } x = \frac{cf + b - a}{b + 2 - g}.$$

Das ist nun die verlangte Gleichung, worin  $x$  durch lauter bekante Zahlen bestimmt ist. Eine solche Gleichung, welche uns die Verbindung verschiedener Zahlen unter einander, und besonders die Art, wie  $x$  aus den gegebenen Zahlen entsteht, deutlich vor Augen legt, pflegt man auch eine Formel zu nennen, (und die Entwicklung einer solchen Formel, die Auflösung einer Gleichung.)

#### §. 65.

Es ergiebt sich aus den beiden vorhergehenden §. §. folgende allgemeine Regel:

Eine jede- (auch aus mehreren Gliedern zusammengesetzte) Zahl, welche die eine ganze Seite einer Gleichung multiplicirt, kan von dieser Seite weggenommen, und als ein Divisor der andern Seite angesetzt werden, und umgekehrt eine jede Zahl, welche eine ganze Seite dividirt, von dieser Seite weggenommen, und als ein Multiplikator der andern Seite angesetzt werden ohne daß die Gleichheit beider Seiten aufgehoben wird.

## Anwend. der ersten Grundsätze. 47

§. 66.

### XV. Aufgabe.

Ich bin jetzt alt 24 Jahr; du, Frize, bist jetzt alt 9 Jahr. Ich bin also jetzt mehr als noch einmal, oder, wie man auch zu reden pflegt, mehr als zweimal so alt, als du: nach wie viel Jahren wird, wenn wir beide fortleben, die Zahl meiner Jahre gerade nur noch einmal so groß sein, als die Zahl deiner Jahre?

§. 67.

### Vorbereitung.

Nach  $x$  Jahren bin ich alt  $24 + x$  Jahre, und Frize ist nach  $x$  Jahren ohne Zweifel alt  $9 + x$  Jahre. Wenn ich demnach  $x$  so groß annehme, daß  $2(x + 9) = 24 + x$  wird; so giebt die Zahl  $x$  die Zahl der Jahre an, nach deren Verfließung die Forderung der Aufgabe erfüllt wird.

§. 68.

### Auflösung.

Sol aber nun  $2(x + 9) = 24 + x$ , oder welches einerlei ist,  $2x + 18 = 24 + x$  sein; so muß auch (§. 62.)  $2x = 24 + x - 18$ , ferner auch (§. 62.)  $2x - x = 24 - 18$ , das ist,  $x = 24 - 18 = 6$  sein.

In der That muß auch nach 6 Jahren Frize 15 Jahr und ich 30 Jahr alt, also ich gerade noch einmal so alt als Frize sein.

§. 69.

Wäre gegeben  $a = 8$ ,  $b = 16$ ,  $c = 3$ ,  $d = 19$ ;  
so wäre  $x = \frac{16 + 19}{8 - 3} = \frac{35}{5} = 7$ .

Für  $a = 7$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 12$ , kommt  
 $x = \frac{12 + 2}{7 - 3} = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}$ ; also müßten dritte-  
halb Personen da gewesen sein, wo die halbe Per-  
son nichts anders bedeuten kan, als eine Person,  
welche nur halb so viel als eine jede andere erhält.

§. 54.

Grundsatz.

Wenn zwei Größen einmal genom-  
men gleich sind; so sind auch ihre Dupla,  
Tripla, Quadrupla, &c. einander gleich.  
Z. B.

Wenn  $x = a + b$

so ist auch  $2x = 2(a + b) = 2a + 2b$

auch  $3x = 3(a + b) = 3a + 3b$

überhaupt auch  $nx = n(a + b)$ , was auch  $n$  für  
eine Zahl bedeuten mag.

§. 55.

Grundsatz.

Wenn zwei Größen einmal genommen  
gleich sind; so sind auch die Halften, die  
Drittel, die Viertel, &c. dieser beiden Grö-  
ßen einander gleich. Z. B.

Wenn



## Anwend. der ersten Grundsätze. 41

Wenn  $a y = d + b$

so ist auch  $\frac{a y}{2} = \frac{d + b}{2}$

auch  $\frac{a y}{3} = \frac{d + b}{3}$

und überhaupt  $\frac{a y}{n} = \frac{d + b}{n}$ , was auch  $n$  für

eine Zahl bedeuten mag.

### §. 56.

Nachdem man eine vorgelegte Aufgabe gehörig überdacht, und die darin gethanen Forderungen durch die festgesetzten Zeichen der vorzunehmenden Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ausgedrückt und in eine Gleichung gebracht hat: so muß man darauf bedacht sein, aus dieser angeetzten Grundgleichung, durch solche Veränderungen, wodurch die einmal festgesetzte Gleichheit beider Seiten nicht gestört wird, endlich eine Gleichung herzuleiten, worin der Werth der unbekannten Zahl durch die andern bekannten Zahlen angegeben und deutlich bestimmt wird. Diese Absicht wurde erreicht in der XN. Aufgabe, durch die letzte Gleichung  $x = b - a$ , in der letz-

tern XIV. Aufgabe durch die letzte Gleichung  $x = d + b$ , und wird offenbar allemal erreicht

durch eine solche Gleichung, deren eine Seite nur

die unbekannte Zahl, und deren andere Seite lauter bekannte Zahlen enthält.

## §. 57.

Wie man nun aus einer jeden Gleichung von der Art, wie wir sie fürs erste nur bekommen werden, durch gehörige Veränderungen allemal eine solche Gleichung herleiten können, das wollen wir an folgender Gleichung bei A) lernen.

$$A) \quad bx + a - b = cf - 2x + gx.$$

## §. 58.

Wir werden unserm Ziele näher gekommen sein, wenn wir

I) alle diejenigen Glieder, worinnen sich bloß bekannte Zahlen finden, von der einen Seite weggeschafft haben. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten  $-a + b$  hingusetzen; so wird nach §. 47. noch bleiben

$$B) \quad bx + a - b = cf - 2x + gx - a + b$$

$$\text{das ist } C) \quad bx = cf - 2x + gx - a + b$$

## §. 59.

Halten wir diese Gleichung bei C) mit der ersten bei A) zusammen; so fällt in die Augen, daß diese letztere bei C) aus der ersten bei A) hervorgebracht wird, wenn man das Glied  $+a$  von der linken Seite wegnimmt und mit entgegengesetztem Zeichen,

## Anwend. der ersten Grundsätze. 43

Zeichen, als  $-a$ , auf die rechte Seite schreibt, und eben so auch das Glied  $-b$  von der linken Seite wegnimmt, und mit entgegengesetzten Zeichen, als  $+b$ , auf die rechte Seite schreibt.

### §. 60.

Nachdem wir auf diese Weise alle Glieder von bloß bekannten Zahlen auf die rechte Seite gebracht haben; so werden wir die bekannten Zahlen von den unbekannten noch mehr dadurch absondern können, daß wir

II. Die unbekannten Glieder von der rechten Seite weg und auf die linke Seite hinbringen. In dieser Absicht wollen wir zu beiden Seiten der Gleichung bei C) die Glieder  $-ax + gx$  mit entgegengesetzten Zeichen als  $+ax - gx$  hinzufügen; so werden nach diesem gleichen Zusätze nicht nur beide Seiten noch gleich bleiben, so, daß

$$D) \quad bx + ax - gx = cf - ax + gx - a + b$$

ist  $+ax - gx$

sondern es wird auch  $-ax + ax + gx - gx = 0$ , folglich diese Gleichung bei D einerlei mit folgender sein

$$E) \quad bx + ax - gx = cf - a + b$$

### §. 61.

Wenn wir mit der Gleichung bei C diese letzte bei E zusammen halten; so bemerken wir (wie §. 59.) daß auch hier die letztere Gleichung bei E aus

aus der vorhergehenden bei C entsteht, wenn in der ersten Gleichung bei C ein jedes unbekannte Glied von der rechten Seite weggestrichen und auf die linke Seite mit entgegengesetztem Zeichen geschrieben wird. Aus dieser und der §. 59 gemachten Bemerkung ergiebt sich also folgende

### Algemeine Regel.

§. 62.

Daß man in jeder Gleichung ein jedes beliebiges Glied von der einen Seite wegnimmt, und auf die andere mit entgegengesetztem Zeichen schreiben kan; ohne daß die Gleichheit der beiden Seiten dadurch aufgehoben wird.

§. 63.

Ist man durch Anwendung dieser Regel mit einer Gleichung so weit gekommen, daß sich alle Glieder, worinnen die unbekannte Zahl vorkommt, auf einer Seite, und alle übrigen bekannten Glieder auf der andern Seite befinden; so mus man ferner noch darauf bedacht sein,

III) alle diejenigen bekannten Zahlen, welche etwan noch als Faktoren oder Divisoren mit der unbekannten Zahl verbunden sind, durch eine ge-  
richte Division oder Multiplikation ebenfalls von dieser Seite wegzubringen, welches allenthal geschehen kan, indem man z. B. auf folgende Art schließt:  
Wenn

## Anwend. der ersten Grundsätze. 45.

Wenn setz sol  $m x = a + q$ ; so mus auch

sein  $\frac{m x}{m} = \frac{a + q}{m}$  (§. 55.)

das ist  $x = \frac{a + q}{m}$  sein.

Oder: wenn  $\frac{x}{n} = r + s$  sein sol; so mus

auch  $\frac{n \cdot x}{n} = n(r + s)$  sein, (§. 54.)

das ist  $x = n(r + s)$  sein.

### §. 64.

Hätte aber die Gleichung nach Anwendung der §. 63. gegebenen Regel auf der einen Seite mehr als ein unbekantes Glied erhalten, wie es bei unserer zuletzt herausgebrachten Gleichung (§. 60.)

E)  $b x + 2 x - g x = c f + b - a$   
 der Fall ist; so kan nun allemal der allen dreien Gliedern gemeinschaftliche Factor, welches hier  $x$  ist, nach §. 21. herausgezogen, und stat der Gleichung bei C folgende geschrieben werden:

F)  $(b + 2 - g) x = c f + b - a$

Nach dieser kleinen Veränderung des Ausdrucks besteht die linke Seite allemal aus zwei Factoren. Der eine ist die unbekannte Zahl, der andere enthält lauter bekante Zahlen. Man dividirt nunmehr durch diesen bekanten Factor, und schließet, daß wenn die Gleichung bei F richtig ist, oder  
 richtig

richtig sein sol, auch nach dieser Division sein

$$\text{müsse G) } \frac{(b + 2 - g) x}{b + 2 - g} = \frac{cf + b - a}{b + 2 - g},$$

$$\text{das ist } x = \frac{cf + b - a}{b + 2 - g}.$$

Das ist nun die verlangte Gleichung, worin  $x$  durch lauter bekante Zahlen bestimmt ist. Eine solche Gleichung, welche uns die Verbindung verschiedener Zahlen unter einander, und besonders die Art, wie  $x$  aus den gegebenen Zahlen entsteht, deutlich vor Augen legt, pflegt man auch eine Formel zu nennen, (und die Entwicklung einer solchen Formel, die Auflösung einer Gleichung.)

#### §. 65.

Es ergiebt sich aus den beiden vorhergehenden §. §. folgende allgemeine Regel:

Eine jede- (auch aus mehreren Gliedern zusammengesetzte) Zahl, welche die eine ganze Seite einer Gleichung multiplicirt, kan von dieser Seite weggenommen, und als ein Divisor der andern Seite angesetzt werden, und umgekehrt eine jede Zahl, welche eine ganze Seite dividirt, von dieser Seite weggenommen, und als ein Multiplikator der andern Seite angesetzt werden ohne daß die Gleichheit beider Seiten aufgehoben wird.

## Anwend. der ersten Grundsätze. 47

§. 66.

### XV. Aufgabe.

Ich bin jetzt alt 24 Jahr; du, Frize, bist jetzt alt 9 Jahr. Ich bin also jetzt mehr als noch einmal, oder, wie man auch zu reden pflegt, mehr als zweimal so alt, als du: nach wie viel Jahren wird, wenn wir beide fortleben, die Zahl meiner Jahre gerade nur noch einmal so gros sein, als die Zahl deiner Jahre?

§. 67.

### Vorbereitung.

Nach  $x$  Jahren bin ich alt  $24 + x$  Jahre, und Frize ist nach  $x$  Jahren ohne Zweifel alt  $9 + x$  Jahre. Wenn ich demnach  $x$  so groß annehme, daß  $2(x + 9) = 24 + x$  wird; so giebt die Zahl  $x$  die Zahl der Jahre an, nach deren Verfließung die Forderung der Aufgabe erfüllt wird.

§. 68.

### Auflösung.

Sol aber nun  $2(x + 9) = 24 + x$ , oder welches einerlei ist,  $2x + 18 = 24 + x$  sein; so mus auch (§. 62.)  $2x = 24 + x - 18$ , ferner auch (§. 62.)  $2x - x = 24 - 18$ , das ist,  $x = 24 - 18 = 6$  sein.

In der That muß auch nach 6 Jahren Frize 15 Jahr und ich 30 Jahr alt, also ich gerade noch einmal so alt als Frize sein.

§. 69.

§. 69.

## XVI. Aufgabe.

Johan ist  $a$  Jahre, August  $b$  Jahre; wenn, oder nach wie viel Jahren wird Johan  $n$  mal so alt sein als August?

§. 70.

## Vorbereitung.

Johan, der jetzt  $a$  Jahre alt ist, wird nach  $x$  Jahren alt sein  $a + x$  Jahre; und August, der an jetzt  $b$  Jahre alt ist, wird nach  $x$  Jahren alt sein  $b + x$  Jahre. Sol nun  $x$  die in der Aufgabe verlangte Zahl von Jahren sein, nach welchen Johan gerade  $n$  mal so alt sein sol, als August; so mus  $x$  so groß genommen werden, daß  $a + x = n(b + x)$  wird.

§. 71.

## Auflösung.

Sol aber  $a + x = n(b + x)$ , oder welches einerlei ist,  $a + x = nb + nx$  sein; so mus auch (§. 62.)  $a - nb + x = nx$ ; und ferner

$$(\S. 62.) \quad a - nb = nx - x;$$

das ist,  $a - nb = nx - 1 \cdot x$ ; oder den gemeinschaftlichen Factor  $x$  herausgezogen,

$$a - nb = (n - 1)x, \text{ folglich auch}$$

$$(\S. 65.) \quad a - nb = x \text{ sein.}$$

$$\frac{a - nb}{n - 1}$$

§. 72.



## Anwend. der ersten Grundsätze. 49

### §. 72.

Es sei  $a = 24$ ,  $b = 9$ ,  $n = 2$ ; so ist  
$$x = \frac{24 - 2 \cdot 9}{2 - 1} = 6$$
, welches eben der Werth ist,

welcher in der vorigen Aufgabe für  $x$  gefunden wurde.

Wie groß wird  $x$  nach dieser Formel,  
wenn  $a = 63$ ,  $b = 12$ ,  $n = 4$ ? Antw. 5.

### §. 73.

Man gebe sich selbst verschiedene Werthe für die Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $n$ ; so wird man noch deutlicher sehen, wie man durch Hülfe einer solchen allgemeinen Formel bei allen ähnlichen Aufgaben mit leichter Mühe die gesuchte Zahl bestimmen kan, ohne daß man nöthig hat, die ganze Auflösung jedesmal zu wiederholen.

### §. 74.

Wenn man aber solche Werthe für die Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $n$ , ohne alle Bedachtsamkeit angiebt; so kan es treffen, daß das, was in der Aufgabe verlangt wird, bei den angegebenen Zahlen gar nicht möglich ist. Wenn uns z. B. die Frage vorgelegt würde: Johan ist alt 20 Jahr, Friedrich alt 12 Jahr; nach wie viel Jahren wird Johan zweimal so alt sein, als Friedrich? — so sehen wir leicht ein, daß der Fall gar nicht mehr vorkommen kan, und immer weniger möglich wird, je älter beide werden. Wir wollen indessen dennoch diese unmöglich

D

möglich

## 19 Erstes Kapitel.

möglich scheinende Forderung in einer Gleichung ausdrücken und auflösen, wie in der (XV) Aufgabe, damit man sieht wie die Algebraische Rechnungsart in solchen Fällen zurechte weiset. Es soll nach dieser Forderung

$$\text{sein } 20 + x = 2(12 + x)$$

$$\text{oder } 20 + x = 24 + 2x; \text{ folglich}$$

$$\text{mus auch } 20 = 24 + x$$

$$\text{und ferner } 20 - 24 = x$$

$$\text{das ist } -4 = x \text{ sein.}$$

§. 75.

Wir hätten also herausgebracht, daß der Zeitpunkt, in welchem der verlangte Fall Stat fände, von jetzt an entfernt sei um  $-4$  Jahre. So wie nun in der XV. Aufgabe die letzte Gleichung  $x = 6$  andeutete, daß das Verlangte nach 6 Jahren Stat fände; so bedeutet hier  $x = -4$  gewis nichts anders, als daß das Verlangte vor 4 Jahren zugetroffen. Und in der That war Johan, welcher jetzt 20 Jahr ist, vor 4 Jahren alt 16; und Friedrich, welcher jetzt 12 Jahr ist, vor 4 Jahren alt 8 Jahr.

§. 76.

### XVII. Aufgabe.

Ich bin alt 30 Jahr, Friedrich 10, und Karl 8 Jahr: nach wie viel Jahren wird Karls und Friedrichs Alter zusammen genommen gerade gleich sein dem meinigen?

Anlösung.

§. 76.

Auflösung.

$x$  sei die gesuchte Zahl von Jahren; so mus sein

$$30 + x = 10 + x + 8 + x$$

also auch  $30 = 18 + x$

und  $30 - 18 = 12 = x$ .

§. 77.

XVIII. Aufgabe.

In einem Wirthshause waren Männer und Weiber, zusammen 12 Personen. Ein Man verzehrte für 7 Gr. eine jede Frau für 5 Gr. und die ganze Beche belief sich auf 3 Rthlr. 4 Gr. Wie viel Männer und wie viel Weiber waren da?

§. 78.

Auflösung.

Die Anzahl der Männer sei  $x$ ; so ist die Anzahl der Weiber  $12 - x$ . Ein Man verzehrt für 7 Gr. folglich verzehren  $x$  Männer für  $7x$  Gr. Eine Frau verzehrt für 5 Gr. folglich verzehren  $(12 - x)$  Frauen für  $5(12 - x)$  Gr.. Also ist  $7x$  Gr. +  $5(12 - x)$  Gr. = 3 Rthlr. + 4 Gr.

oder  $7x$  Gr. + 60 Gr. —  $5x$  Gr. = 76 Gr.

also überhaupt (\*)  $7x + 60 - 5x = 76$

das ist  $2x + 60 = 76$

D 2

folgt

(\*) Denn wenn  $7x$  gr. + 60 gr. —  $5x$  gr. = 76 gr. sein sol, so wird auch  $7x$  th. + 60 th. —  $5x$  th. = 76 th.

auch  $7x$  El. + 60 El. —  $5x$  El. = 76 Ellen.

also überhaupt  $7x . 1 + 60 . 1 - 5x . 1 = 76 . 1$  sein

müssen.

folglich  $2x = 16$ , und  $1.x$ , das ist, die Anzahl der Männer  $= 8$ . Die Anzahl der Weiber das her  $= 12 - 8$ , das ist  $= 4$ .

§. 79.

### XIX. Aufgabe.

Eine Gesellschaft, welche aus 8 Männern, 6 Frauen und 10 Kindern besteht, wil zu einem gemeinschaftlichen Vergnügen 10 Rthlr. zusammenbringen, so daß ein Kind dreimal weniger, als eine Frau, eine Frau aber 4 Gr. weniger, als ein Man gibt. Wie viel mus jedes geben?

§. 80.

### Auflösung.

Ein Kind gebe  $x$  Gr. so giebt eine Frau  $3x$  Gr. und ein Man  $3x$  Gr. + 4 Gr. und es mus sein

$$10x \text{ Gr.} + 6 \cdot 3x \text{ Gr.} + 8(3x + 4) \text{ Gr.} = 10 \text{ Rthlr.}$$

$$\text{oder } 10x \text{ Gr.} + 18x \text{ Gr.} + 24x \text{ Gr.} + 32 \text{ Gr.} = 240 \text{ Gr.}$$

$$\text{folglich überhaupt } 52x + 32 = 240$$

$$\text{also } 52x = 240 - 32 = 208$$

$$\text{daher } x = \frac{208}{52} = 4.$$

Antwort:

musen, was auch diese Einheit, 1, für eine Größe bedeuten mag. Hieraus sehen wir, daß eine solche Einheit keinen weitem Einfluss in die Bestimmung der Zahl  $x$  hat, und ganz aus der Acht gelassen werden kan, wenn sie in allen Gliedern einer Gleichung dieselbe ist.

## Anwend. der ersten Grundsätze. 53

Antwort: Ein Kind gibt 4 Gr. eine Frau  
3. 4 Gr. das ist 12 Gr. ein Man (3. 4 + 4). 1 Gr.  
das ist, 16 Gr.

§. 81.

### XX. Aufgabe.

Es hat jemand 12 Stük Tuch verfertigen las-  
sen, worunter 2 weisse, 3 schwarze und 7 blaue  
sind. Es kostet ein Stük schwarzes Tuch 2 Rthlr.  
mehr, als ein weisses, und ein Stük blaues Tuch  
3 Rthlr. mehr, als ein schwarzes, und alle 12 Stük  
zusammen kosten 140 Rthlr. wie viel kostet ein  
weisses, wie viel ein schwarzes und wie viel ein  
blaues Stük?

§. 82.

### Auflösung.

Man setze, Ein weisses koste  $x$  Rthlr. so kosten  
die 2 weissen  $2x$  Rthlr.

Ein schwarzes kostet alsdann  $x + 2$  Rthlr., also

die 3 schwarzen  $3x + 6$  Rthlr.

Ein blaues kostet alsdann  $x + 5$  Rthlr., also

die 7 blauen  $7x + 35$  Rthlr.

Alle zusammen kosten demnach  $12x + 41$ , und man

$$\text{hat } 12x + 41 = 140$$

$$\text{daher ist } 12x = 99$$

$$x = \frac{99}{12} = 8 \frac{1}{4} \text{ Rthlr.}$$

D 3

Er

Es kostet also

Ein weisses

$8\frac{1}{2}$  Rthlr. daher die 2 weissen  $16\frac{1}{2}$  Rthlr.

Ein schwarzes

$10\frac{1}{4}$  Rthlr. daher die 3 schwarzen  $30\frac{3}{4}$  Rthlr.

Ein blaues

$12\frac{1}{2}$  Rthlr. daher die 7 blauen  $91\frac{1}{2}$  Rthlr.

und alle 12 zusammen  $137 + \frac{1}{2} = 140$  Rthlr.

§. 83.

### XXI. Aufgabe.

Zwei Knaben, Klaus und Franz, haben etliche Pfennige. Nachdem 1) Klaus an Franz einen Pfennig abgegeben hatte, so hatten beide gleich viel. Hätte aber stat. dessen Franz an Klaus einen Pfennig gegeben, so hätte alsdan Klaus gerade noch einmal so viel gehabt, als Franz. Wie viel hatte ein jeder?

§. 84.

Auflösung.

Es habe gehabt Klaus  $x$  Pfennige und Franz  $y$  Pfennige; so hat, nachdem Klaus an Franz einen Pfennig gegeben, Klaus noch  $x - 1$  und Franz  $y + 1$  Pfennig, und es ist

$$1) \quad x - 1 = y + 1.$$

Hätte aber Franz von seinen  $y$  Pf. an Klaus, der  $x$  Pf. hatte, einen abgegeben; so hätte behalten Franz  $y - 1$  Pf. und Klaus gehabt  $x + 1$  Pfennig.  
Und

## Anwend. der ersten Grundsätze. 55

Und da in diesem Falle Klaus noch einmal so viel haben sollte als Franz; so mus sein

$$\text{II) } x + 1 = 2(y - 1).$$

Wir haben also folgende zwei Grundgleichungen;

$$\text{I) } x - 1 = y + 1 \quad \text{II) } x + 1 = 2y - 2$$

aus der ersten folgt

aus der zweiten

$$\text{daß } x = y + 2$$

$$\text{daß } x = 2y - 3$$

aus welchen beiden Gleichungen sich diese neue Gleichung ergibt  $y + 2 = 2y - 3$ . Daher

$$\text{ferner } 2 = 2y - y - 3$$

$$\text{das ist } 2 = y - 3,$$

also  $2 + 3 = y$  sein mus. Wir wissen

demnach, daß  $y = 5$  sei. Schreiben wir nun in eine von den vorigen Gleichungen, worinn sowohl  $x$  als  $y$  enthalten waren, z. B. in  $x = y + 2$ , stat  $y$  den gefundenen Werth desselben, 5; so ergibt sich  $x = 5 + 2 = 7$ .

Antwort: Klaus hatte 7 Pfennige und Franz 5 Pfennige.

§. 85.

### XXII. Aufgabe.

Ein Maulesel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel: wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du. Darauf antwortet der Maulesel: wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wie viel Pud trug der Esel, wie viel der Maulesel?

D 4

§. 86.

§. 86.

Auflösung.

Man setze, der Esel trug  $x$  Pud, der Maul-  
esel  $y$  Pud; so ist

$$\text{I) } x+1=2(y-1) \quad \text{II) } (x-1)3=y+1$$

$$\text{oder } x+1=2y-2, \quad 3x-3=y+1$$

Man hat hier wieder, wie in der vorigen  
Aufgabe, zwei unbekannte Größen, aber auch zwei  
Gleichungen. Man suche demnach die eine unbe-  
kannte Größe, mit welcher es am leichtesten ist,  
sowohl in der einen als in der andern Gleichung,  
allein auf der einen Seite der Gleichung zu erhal-  
ten: hier ergiebt sich aus

$$\text{der ersten Gleichung } x=2y-3,$$

$$\text{und aus der zweiten } x=\frac{y+4}{3},$$

und schließe nun wieder: da  $2y-3$  gleich ist  $x$   
und  $\frac{y+4}{3}$  ebenfalls gleich ist  $x$ ; so muss nothwend-

$$\text{ig sein (§. 43.) } 2y-3=\frac{y+4}{3}.$$

Was nun  
einmal genommen gleich ist, das ist auch dreimal  
genommen gleich; also ist

$$3(2y-3)=\frac{3(y+4)}{3}$$

$$\text{oder } 6y-9=y+4$$

$$y \text{ abgezogen bleibt } 5y-9=4$$

$$9 \text{ addirt, föhrt } 5y-9+9=4+9$$

$$\text{oder } 5y=13,$$

$$\text{daher mus sein } y=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}.$$

Nach.



## Anwend. der ersten Grundsätze. 57

Nachdem der Werth von  $y$  bekannt ist, so läßt sich der Werth von  $x$  durch eine von den vorigen Gleichungen bestimmen, worinnen  $x$  und  $y$  enthalten ist, welches desto leichter wird, je einfacher die Gleichung ist, welche man dazu gebraucht. Man schreibe hier in der Gleichung  $x = 2y - 3$ , stat  $y$  den gefundenen Werth desselben  $\frac{7}{2}$ ; so erhält man sogleich  $x = 2\frac{7}{2} - 3 = 5\frac{1}{2} - 3 = 2\frac{1}{2}$ .

Antwort: Der Esel trug  $2\frac{1}{2}$ , der Maulesel  $2\frac{3}{4}$  Pud, womit die Probe leicht zu machen ist.

§. 87.

### XXIII. Aufgabe.

Es hat jemand 2 silberne Becher und einen Deckel dazu. Der erste Becher, welcher 12 Loth schwer ist, wiegt 1) mit dem Deckel, dessen Gewicht unbekant ist, zusammen zweimal so viel als der andere Becher. Der andere Becher, dessen Gewicht ebenfalls unbekant ist, wiegt 2) mit dem Deckel zusammengekommen dreimal so viel, als der erste Becher. Wie viel wiegt der Deckel und wie viel der zweite Becher?

§. 88.

### Auflösung.

Es wiege der Deckel  $x$  Loth, der zweite Becher  $y$  Loth; so ist

$$I) 12 + x = 2y \text{ und } II) y + x = 36$$

$$\text{also } x = 2y - 12$$

$$x = 36 - y$$

D 5

folglich

folglich ist  $2y - 12 = 36 - y$ , auf beiden Seiten  $y$  addirt,  $3y - 12 = 36$

+ 12 addirt,  $3y = 48$

$$y = \frac{48}{3} = 16.$$

Da nun  $x = 36 - y$ ; so ist  $x = 36 - 16 = 20$ .

Antwort: Der Deckel wiegt 20 Loth, der zweite Becher 16 Loth.

§. 89.

#### XXIV. Aufgabe.

Frize und Karl haben Nüsse. Nachdem I) Frize an Karl  $a$  Nüsse gegeben hatte; so hatten beide gleich viel. Hätte aber stat dessen II) Karl an Frizen  $b$  Nüsse gegeben; so hätte alsdann Frize  $n$  mal so viel Nüsse gehabt, als Karl. Wie viel Nüsse hatte Frize, wie viel hatte Karl?

§. 90.

#### Auflösung.

Es habe gehabt Frize  $x$  und Karl  $y$  Nüsse; so wird

I)  $x - a = y + a$  und II)  $x + b = n(y - b)$  sein. Man bringe nun in jeder Gleichung diejenige von den beiden unbekannten Größen, mit welcher es am leichtesten wird, ganz allein auf die eine Seite; so erhält man aus der

ersten Gleichung  $x = y + 2a$ , aus der zweiten Gleichung  $x = ny - nb - b$ , daher denn

$$\text{sein muss } y + 2a = ny - nb - b.$$

Daher

## Anwend. der ersten Grundsätze. 59

Daher auch  $2a + nb + b = ny - y$

oder (§. 21)  $2a + (n+1)b = (n-1)y$

also (§. 65)  $2a + (n+1)b = y$

Gesetzt nun, daß gegeben wäre  $a=5$ ,  $b=4$ ,  $n=7$ ;  
so wird  $y = \frac{2 \cdot 5 + (7+1) \cdot 4}{7-1} = \frac{10 + 32}{6} = \frac{42}{6} = 7$

Nachdem man auf diese Art die unbekannte Zahl  $y$  gefunden hat, so läßt sich nunmehr auch die andere  $x$  bestimmen, indem man in der Gleichung  $x = y + 2a$ , stat  $y$  den gefundenen Werth desselben, nämlich 7 schreibt; wodurch sich ergibt, daß  $x = 7 + 2 \cdot 5 = 17$  sei.

§. 91.

### XXV. Aufgabe.

Man hat  
numerirten Käst  
höchste 9 Schlab  
mehrern kleine F  
sind darinnen 6 D  
hat 8 Fächer; de  
zu 9 Reihen und  
geben. In meh  
ein Ring oder de  
versteht: ich sol t  
Zahl des Kasten  
und des Faches f

§. 92.

S. 92.

## Auflösung.

Ich lasse 1) zur Zahl des Kastens  $g$  addiren, diese Summe 2) durch 10 multipliciren, zu diesem Produkte 3) die Zahl der Schieblade addiren, diese Summe 4) durch 10 multipliciren, dazu 5) die Zahl der Reihe addiren, von dieser Summe 6) die Zahl 6 abziehen, den bleibenden Rest 7) durch 10 multipliciren, 8) die Zahl des Faches dazu addiren und von dieser Summe 9) noch 7 abziehen. Nur diese zuletzt übrig bleibende Zahl wird mir angegeben, und nachdem ich selbst von derselben 10) 8933 abgezogen habe; so wird eine Zahl übrig bleiben, welche in ihrer ersten Decimalstelle die Zahl des Faches, in der zweiten Decimalstelle, die Zahl der Reihe, in der dritten, die Zahl der Schieblade und in den noch übrigen höhern Decimalstellen, die Zahl des Kastens hat. Z. B. Wenn nach den vorgeschriebenen 9 Operationen die Zahl 21476 herausgekommen und mir angegeben wäre; so würd ich davon 8933 abziehen und aus der übrigbleibenden Zahl 12543 schließen, daß das Versteckte im 1ten Kasten, in der 5ten Schieblade, in der 4ten Reihe und in derselben 3tem Fache zu finden sei. Um uns von der allgemeinen Richtigkeit dieser Auflösung zu überzeugen, wollen wir nennen die Zahl des Kastens  $k$ , die Zahl der Schieblade  $s$ , die Zahl der Reihe  $r$ , die Zahl des Faches  $f$ , so werden wir durch die angegebenen 9 Operationen nach und nach erhalten wie folget:

1)  $k$

## Anwend. der ersten Grundsätze.

- 1)  $k + 9$ , 2)  $10k + 90$ , 3)  $10k + 90 + s$ ,  
 4)  $100k + 900 + 10s$ , 5)  $100k + 900 + 10s + r$ ,  
 6)  $100k + 900 + 10s + r - 6$ , das ist,  
 $100k + 894 + 10s + r$ ,  
 7)  $1000k + 8940 + 100s + 10r$ ,  
 8)  $1000k + 8940 + 100s + 10r + f$ ,  
 9)  $1000k + 8933 + 100s + 10r + f$ ,  
 Nachdem ich nun davon die 8933 abziehe; so  
 bleibt mir  
 10)  $1000k + 100s + 10r + f$ .

Wenn wir nun, so wie man stat 3.1000  
 schreibt 3000, stat, 5.100 schreibt 500, so auch  
 hier stat  $k.1000$  schreiben  $k000$ , stat  $s.100$  schrei-  
 ben  $s00$ , und stat  $r.10$  schreiben  $r0$ ; so fällt deut-  
 lich in die Augen, daß alle diese Glieder

$$\begin{array}{r} k000 \\ + \quad s00 \\ + \quad r0 \\ + \quad f \end{array}$$

nach den gewöhnlichen Additionsregeln für die De-  
 cimalzahlen zusammenaddirt eine Summe geben  
 müssen, in deren erster Decimalstelle die Zahl des  
 Faches  $f$ , in deren zweiter Decimalstelle die Zahl  
 der Reihe  $r$ , u. s. w. stehen mus; wenn keine der  
 Zahlen  $f, r, s$ , grösser als 9 angenommen wird.

§. 93.

Man könnte indessen die Zahl  $f$ ,  $r$ ,  $s$  auch alsdan noch entdecken, wenn der Kasten 10 Schiebladen, jede Schieblade 10 Reihen und jede Reihe 10 Fächer hätte. Denn wenn man sich denkt, daß eine von diesen 3 Zahlen z. B. die  $r$  zur 10 würde; so würde alsdann die zweite Decimalstelle gar keine Zahl, also 0 enthalten. Eine 0 zeigt demnach allemal an, daß die Zahl 10, die für diejenige Stelle, wo sich die 0 befindet, gehörige Zahl, und von der in der nächsthöheren Decimalstelle befindlichen Zahl also 1 abziehen sei, um die eigentlich dahin gehörige Zahl zu erhalten. Z. B. Wenn ich nach allen 10 Operationen erhalten hätte 19080, so würde durch diese Zahl angedeutet: das 10te Fach, die 7te Reihe, die 10te Schieblade, der 18te Kasten.

Durch 17000 würde angedeutet das 10te Fach, die 9te Reihe, die 9te Schieblade, der 16te Kasten.



Zweites

## Zweites Kapitel.

### Nähere Vorbereitung zur algebraischen Addition und Subtraktion.

---

§. 94.

#### XXVI. Aufgabe.

Nachdem ich 6 Jahre in Besoldung gestanden, und in den ersten drei Jahren jährlich nur 300 Rthlr. mit jedem folgenden Jahre aber immer 100 Rthlr. mehr ausgegeben, und das übrige von meinen Einkünften beigelegt hatte; so habe ich ein Kapital von 2600 Rthlr. erspart. Wie hoch war meine jährliche Besoldung?

§. 95.

#### Auflösung.

Sei  $x$  Rthlr. so habe ich in jedem der drei ersten Jahre beigelegt  $(x - 300)$  Rthlr. in den drei ersten Jahren zusammen also beigelegt  $3x - 900$  Rthlr. in dem 4ten,  $x - 400$ , in dem 5ten  $x - 500$ , in den 6sten  $x - 600$ ; folglich in allen 6 Jahren zusammen

$3x - 900 + x - 400 + x - 500 + x - 600$ ;  
das ist  $6x - 2400$ . Also ist  $6x - 2400 = 2600$

daher  $6x = 5000$

und  $x = \frac{5000}{6} = 833\frac{1}{3}$  Rthlr.

§. 96.

## 64 Zweites Kapitel. Vorbereitung

§. 96.

### XXVII. Aufgabe.

Zwei Orter M und N (Fig. 3) liegen  $e$  Meilen von einander entfernt. Den 15ten Mai ist jemand von N nach M zu abgereiset, welcher täglich  $c$  Meilen zurücklegt; nach  $b$  Tagen schickt man diesem Reisenden einen Boten von M aus entgegen, welcher täglich  $a$  Meilen geht: wenn und wie weit von M wird der Bote den Reisenden treffen?

§. 97.

### Auflösung.

Man setze, der Bote gehe  $x$  Tage bis er den Reisenden in dem Punkte O trifft; so ist der Reisende, welcher  $b$  Tage früher schon seine Reise angetreten hat, überhaupt  $b + x$  Tage unterwegs. Der Bote geht jeden Tag  $a$  Meilen, folglich in  $x$  Tagen  $a x$  Meilen. Der andre Reisende macht jeden Tag  $c$  Meilen, folglich in  $(b + x)$  Tagen,  $c(b + x)$  Meilen. Die beiden Wege des Reisenden und des Boten müssen zusammen genommen notwendig der ganzen Entfernung der beiden Orter gleich sein; folglich muß sein

$$a x \text{ Meilen} + c(b + x) \text{ Meilen} = e \text{ Meilen}$$

$$\text{also überhaupt } a x + c(b + x) = e$$

$$\text{oder } a x + b c + c x = e$$

$$\text{daher } a x + c x = e - b c$$

$$\text{oder } (a + c) x = e - b c$$

$$\text{daher } x = \frac{e - b c}{a + c} \quad \text{Also bleibt } \frac{e - b c}{a + c} \text{ die}$$



## zum algebraischen Addit. und Subt. 67

Die Anzahl der Tage an, nach welchen der Bote von dem Tage seines Ausganges angerechnet den Reisenden antrifft, und  $a \propto \frac{e - b c}{a + c}$ , die Anzahl

der Meilen, um welche der Ort der Zusammenkunft von M entfernt ist.

### §. 98.

Für den Fall da gegeben wäre  $e = 114$ ,  $c = 8$ ,  $b = 2$ ,  $a = 6$ , würde also

$x = \frac{114 - 8 \cdot 2}{6 + 8} = \frac{98}{14} = 7$  gefunden werden.

In diesen 7 Tagen geht nun der Bote 6. 7, das ist, 42 Meilen, und so weit mus der Ort der Zusammenkunft O von M entfernt liegen. Der Reisende, welcher 2 Tage früher als der Bote, also überhaupt 9 Tage auf der Reise gewesen ist, hat in diesen 9 Tagen 8. 9, das ist 72 Meilen, also gerade den Weg N O zurückgelegt, und befindet sich zu gleicher Zeit mit dem Boten in O.

### §. 99.

### XXVIII. Aufgabe.

Den 1ten Junius ist von Königsberg nach Dessau zu ein Reisender abgegangen, welcher jeden Tag 5 Meilen zurücklegt, und den 14ten Junius wird diesem Reisenden von Dessau aus ein Bote entgegen geschickt, welcher täglich 7 Meilen gehen sol; wenn und wie weit von Dessau wird der Bote den

## 56 Erstes Kapitel Vorbereitung

Den Reisenden treffen? wenn man annimmt, daß Königsberg um 91 Meilen von Dessau entfernt ist?

§. 100.

Man sieht sehr leicht, daß diese Aufgabe nur ein einzelner bestimmter Fall der vorigen allgemeinen Aufgabe ist, und daß man nur  $e = 91$ ,  $c = 5$ ,  $b = 3$ ,  $a = 7$  zu setzen habe, um nach der allgemeinen Formel  $x = \frac{e - bc}{a + c}$  auch für diesen Fall

die Zahl der Tage zu finden, nach welchen der Bote den Reisenden treffen mus. Es wird auf diese Art gefunden  $x = \frac{91 - 15}{7 + 5} = 7\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$  Tag.

Der Bote legt in diesen  $6\frac{1}{2}$  Tagen  $7(6 + \frac{1}{2})$  Meilen, das ist  $42 + 7 = 49$  Meilen zurück, und so weit liegt also der Ort der Zusammenkunft O von Dessau entfernt. Der Reisende aus Königsberg ist 3 Tage früher als der Bote, also überhaupt  $(9 + \frac{1}{2})$  Tage auf der Reise, bis er vom Boten in O angetroffen wird, und da er jeden Tag 5 Meilen reiset; so macht er in dieser Zeit einen Weg von  $5(9 + \frac{1}{2}) = 45 + \frac{5}{2} = 47\frac{1}{2}$  Meilen, und mus also, da  $49 + 47\frac{1}{2} = 96\frac{1}{2}$  ist, allerdings mit dem Boten in O zusammentreffen.

§. 101.

### XXIX. Aufgabe.

Ein Schiff fährt den ersten Mal von der Insel I Fig. 4. nach Osten zu, und legt einen Weg von 30 Meilen

## **zur algebraischen Addit. und Subt. 67**

Meilen zurück. Den folgenden 2ten Mai fährt es anfangs wieder nach Osten noch 8 Meilen fort, wird aber darauf durch einen Ostwind zurück nach Westen getrieben um 12 Meilen. In der Nacht zwischen dem 2ten und 3ten Mai wird es verschlagen, man weiß nicht wie weit, noch in welcher Richtung. Nachdem man aber am folgenden Tage wieder mit günstigem Westwinde nach Osten zu 40 Meilen gesteuert hat; so findet man sich bei einer andern Insel i welche von der ersten I, um 40 Meilen westwärts liegt. Wie viel Meilen, und in welcher Richtung ist man in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten gefahren?

### **Vorbereitung.**

Wenn man die Grösse einer Bewegung nach Westen zu mit  $+$  bezeichnet; so kan man füglich die gerade entgegengesetzte Richtung einer Bewegung nach Osten zu durch das Zeichen  $-$  anzeigen. Denn wenn ich von einem Orte vier Meilen nach Westen zu gehe, und gehe darauf wieder 4 Meilen gerade zurück nach Osten; so bin ich wieder auf dem ersten Flecke, und bin mit diesen beiden Bewegungen um nichts weiter gekommen. Nun ist aber auch  $+ 4 - 4 = 0$ ; wo die 0 anzeigt, daß ich mich durch diese beiden Bewegungen von meinem ersten Orte um nichts, weder nach Westen noch nach Osten hin entfernt habe.

Ginge ich aber 8 Meilen westwärts ( $+ 8$ ) und 6 Meilen zurück Ostwärts ( $- 6$ ); so müste  
E 2 ich

## 68 Zweites Kapitel. Vorbereitung

ich darauf von dem Orte meines Ausgehens noch um 2 Meilen nach Westen hin entfernt bleiben: es giebt aber auch  $+ 8 - 6 = + 2$ ; wo durch  $+ 2$  die 2 Meilen westwärts angezeigt werden. Ginge ich 10 Meilen westwärts, und darauf 16 Meilen gerade zurück nach Osten; so müste ich nach diesen beiden Bewegungen 6 Meilen nach Osten zu von dem Orte, wo ich ausgegangen war, entfernt sein. Es giebt aber auch  $+ 10 - 16 = - 6$ . In unserer Aufgabe wollen wir, weil dies gleichgültig ist, die Bewegungen nach Osten zu durch  $+$  und daher die entgegengesetzten Bewegungen nach Westen zu durch  $-$  bezeichnen.

§. 102.

### Auflösung.

Wir haben demnach der Ordnung nach folgende Bewegungen des Schiffes. Am ersten Mai  $+ 30$ , am 2ten  $+ 8$  und  $- 12$ , in der folgenden Nacht eine unbekannte Länge in unbekannter Richtung  $\dots x$ , den dritten Mai  $+ 10$ .

Nun ist mit allen diesen Bewegungen zusammengenommen das Schiff bis an die Insel I gekommen, welche von der ersten Insel I noch 20 Meilen westwärts liegt. Demnach mus

sein  $+ 30 + 8 - 12 \dots x + 10 = - 20$ .

das ist  $+ 36 \dots x = - 20$

Folglich  $\dots x = - 56$ , welches anzeigt, daß das Schiff in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten überhaupt um 56 Meilen nach Westen verschlagen ist.

§. 103.

## zur algebr. Addition und Subtr. 69

§. 103.

Man könnte die Gleichung auch folgendermaßen ansetzen: Das Schiff ist mit den wirklich gemachten Bewegungen bis in i gekommen: wenn es also ferner noch 20 Meilen nach Osten zu gesegelt wäre, so würde es von I um nichts entfernt, also  $30 + 8 - 12 \dots x + 10 + 20 = 0$  sein.

Diese Gleichung ist mit der vorhin angesetzten

$30 + 8 - 12 \dots x + 10 = -20$  völlig einerlei, und beide bestimmen einerlei Werth für  $\dots x$

§. 104.

Auf gleiche Art kan man die entgegengesetzte Beziehung, in welcher Einnahme und Ausgabe, Schulden und ausstehende Kapitalien, Druck und Gegendruck, Zug und Gegenzug, Ausfließen und Einfließen u. d. g. stehen, durch die beiden Zeichen  $+$  und  $-$  andeuten. Z. B. Wenn ich 100 Rthlr. Schulden, und 60 Rthlr. ausstehendes Kapital habe; so bin ich eigentlich nur 40 Rthlr. schuldig. Bezeichnet man nun die Zahl, welche die Schuld anzeigt, durch  $-$ , und die Zahl des ausstehenden Kapitals durch  $+$ ; so zeigt in  $-100 + 60 = -40$ , die  $-40$  an, daß ich, beides zusammen genommen, 40 Rthlr. schuldig bin. Oder bezeichnet man das schuldige Geld durch  $+$ , das vorrathige aber durch  $-$ ; so erhält man  $+100 - 60 = +40$ ; wo nun die  $+40$ , vierzig Rthlr. Schuld anzeigen.

## 70 Drittes Kapitel. Von der

§ 105.

Wenn 60 Maß Wasser in ein Gefäß durch eine Röhre hinein, und 20 Maß durch eine andere wieder ausgeflossen sind; so ist es so gut, als ob nur 40 Maß hineingeflossen wären. Setzt man nun vor der Zahl der einfließenden Quantität Wassers das Zeichen +, vor der Zahl des ausfließenden Wassers das Zeichen —; so zeigt in  $+ 60 - 20 = + 40$  die Zahl + 40 an, daß 40 Maß Wasser mehr eingeflossen, als ausgeflossen; folglich auch 40 Maß in dem Gefäße zurückgeblieben sind.



## Drittes Kapitel.

### Von der algebraischen Addition und Subtraktion.

§. 106.

Wenn ich mehrere Zahlen, eine jede mit demjenigen Zeichen, welches ihr wegen der Natur derjenigen Sache, dessen Grösse sie ausdrückt, in Beziehung auf eine andere zukömt, zusammen schreibe; so heißt dies algebraisch addiren, und die ganze Reihe von Gliedern, welche dadurch entsteht, ist eine algebraische Summe. Z. B. Ich habe 60 Rthlr. vorräthiges Geld, 20 Rthlr. Schulden,

## algebr. Addition und Subtrakt. 71

100 Rthlr. noch zu bezahlendes, 30 Rthlr. einzunehmendes Geld und 200 Rthlr. ausstehendes Kapital; so ist folgende Reihe, 60 Rthlr. — 20 Rthlr. — 100 Rthlr. + 30 Rthlr. + 200 Rthlr. die algebraische Summe aller dieser Größen.

Man sagt ja auch schon im gemeinen Leben: Einnahme und Ausgabe, Schulden und Kapitalien, Inventarium, ic. zusammengenommen haben wir so und so viel. In einem solchen Zusammennehmen mehrerer Größen besteht die algebraische Addition.

§. 107.

Demnach erhält man die algebraische Summe mehrerer Zahlen sogleich, dadurch, daß man alle diese Zahlen, eine jede mit dem ihr zukommenden Zeichen, als Glieder einer Reihe nebeneinander schreibt, und es ist,

$$\text{von } 3a - 4bc + d - 2g + \underbrace{2b + mn}_{n} + 9fg$$

$$\text{und } 5a - 2bc - d + 30 - \underbrace{gh + mn}_{n} - 6fg$$

$$\text{die Summe } 5a + 3a - 4bc - 2bc + d - d - 2g + 30 + \underbrace{2b}_{n} + gh + mn + mn + 9fg - 6fg.$$

oder kürzer geschrieben:

$$8a - 6bc + 2 + \underbrace{2b}_{n} + gh + 2mn + 3fg:$$

indem es weit bequemer und deutlicher ist

8a, als 5a + 3a, — 6bc, als — 4bc — 2bc u. s. w. zu schreiben.

§ 4

§. 108.

## 64 Zweites Kapitel. Vorbereitung

§. 96.

### XXVII. Aufgabe.

Zwei Oerter M und N (Fig. 3) liegen  $e$  Meilen von einander entfernt. Den 15ten Mai ist jemand von N nach M zu abgereiset, welcher täglich  $c$  Meilen zurücklegt; nach  $b$  Tagen schickt man diesem Reisenden einen Boten von M aus entgegen, welcher täglich  $a$  Meilen geht: wenn und wie weit von M wird der Bote den Reisenden treffen?

§. 97.

### Auflösung.

Man setze, der Bote gehe  $x$  Tage bis er den Reisenden in dem Punkte O trifft; so ist der Reisende, welcher  $b$  Tage früher schon seine Reise angetreten hat, überhaupt  $b + x$  Tage unterwegs. Der Bote geht jeden Tag  $a$  Meilen, folglich in  $x$  Tagen  $a x$  Meilen. Der andre Reisende macht jeden Tag  $c$  Meilen, folglich in  $(b + x)$  Tagen,  $c (b + x)$  Meilen. Die beiden Wege des Reisenden und des Boten müssen zusammen genommen nothwendig der ganzen Entfernung der beiden Oerter gleich sein; folglich mus sein

$$a x \text{ Meilen} + c (b + x) \text{ Meilen} = e \text{ Meilen}$$

$$\text{also überhaupt } a x + c (b + x) = e$$

$$\text{oder } a x + b c + c x = e$$

$$\text{daher } a x + c x = e - b c$$

$$\text{oder } (a + c) x = e - b c$$

$$\text{daher } x = \frac{e - b c}{a + c} \quad \text{Also bleibt } \frac{e - b c}{a + c}$$

die



## zumalgebraischen Addit. und Subt. 67

Die Anzahl der Tage  $a$ , nach welchen der Bote von dem Tage seines Ausganges angerechnet den Reisenden antrifft, und  $a \propto \frac{e - b c}{a + c}$ , die Anzahl

der Meilen, um welche der Ort der Zusammenkunft von  $M$  entfernt ist.

§. 98.

Für den Fall da gegeben wäre  $e = 114$ ,  $c = 8$ ,  $b = 2$ ,  $a = 6$ , würde also

$$x = \frac{114 - 8 \cdot 2}{6 + 8} = \frac{100}{14} = 7 \text{ gefunden werden.}$$

In diesen 7 Tagen geht nun der Bote  $6 \cdot 7$ , das ist, 42 Meilen, und so weit muß der Ort der Zusammenkunft  $O$  von  $M$  entfernt liegen. Der Reisende, welcher 2 Tage früher als der Bote, also überhaupt 9 Tage auf der Reise gewesen ist, hat in diesen 9 Tagen  $8 \cdot 9$ , das ist 72 Meilen, also gerade den Weg  $N O$  zurückgelegt, und befindet sich zu gleicher Zeit mit dem Boten in  $O$ .

§. 99.

### XXVIII. Aufgabe.

Den 11ten Junius ist von Königsberg nach Dessau zu ein Reisender abgegangen, welcher jeden Tag 5 Meilen zurücklegt, und den 14ten Junius wird diesem Reisenden von Dessau aus ein Bote entgegen geschickt, welcher täglich 7 Meilen gehen sol; wenn und wie weit von Dessau wird der Bote

E                      den

## 56 Erstes Kapitel Vorbereitung

Den Reisenden treffen: wenn man annimmt, daß Königsberg um 91 Meilen von Dessau entfernt ist?

§. 100.

Man sieht sehr leicht, daß diese Aufgabe nur ein einzelner bestimmter Fall der vorigen allgemeinen Aufgabe ist, und daß man nur  $e = 91$ ,  $c = 5$ ,  $b = 3$ ,  $a = 7$  zu setzen habe, um nach der allgemeinen Formel  $x = \frac{e - bc}{a + c}$  auch für diesen Fall

die Zahl der Tage zu finden, nach welchen der Bote den Reisenden treffen mus. Es wird auf diese Art gefunden  $x = \frac{91 - 15}{7 + 5} = 7\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$  Tag.

Der Bote legt in diesen  $6\frac{1}{2}$  Tagen  $7(6 + \frac{1}{2})$  Meilen, das ist  $42 + 7 = 49$  Meilen zurück, und so weit liegt also der Ort der Zusammenkunft O von Dessau entfernt. Der Reisende aus Königsberg ist 3 Tage früher als der Bote, also überhaupt  $(9 + \frac{1}{2})$  Tage auf der Reise, bis er vom Boten in O angetroffen wird, und da er jeden Tag 5 Meilen reiset; so macht er in dieser Zeit einen Weg von  $5(9 + \frac{1}{2}) = 45 + \frac{5}{2} = 47\frac{1}{2}$  Meilen, und mus also, da  $49 + 47\frac{1}{2} = 96\frac{1}{2}$  ist, allerdings mit dem Boten in O zusammentreffen.

§. 101.

### XXIX. Aufgabe.

Ein Schiff fährt den ersten Mal von der Insel I Fig. 4. nach Osten zu, und legt einen Weg von 30 Meilen

## zur algebraischen Addit. und Subt. 67

Meilen zurück. Den folgenden 2ten Mal fährt es anfangs wieder nach Osten noch 8 Meilen fort, wird aber darauf durch einen Ostwind zurück nach Westen getrieben um 12 Meilen. In der Nacht zwischen dem 2ten und 3ten Mal wird es verschlagen, man weiß nicht wie weit, noch in welcher Richtung. Nachdem man aber am folgenden Tage wieder mit günstigem Westwinde nach Osten zu 40 Meilen gesteuert hat; so findet man sich bei einer andern Insel i welche von der ersten I, um 40 Meilen westwärts liegt. Wie viel Meilen, und in welcher Richtung ist man in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten gefahren?

### Vorbereitung.

Wenn man die Grösse einer Bewegung nach Westen zu mit  $+$  bezeichnet; so kan man füglich die gerade entgegengesetzte Richtung einer Bewegung nach Osten zu durch das Zeichen  $-$  anzeigen. Denn wenn ich von einem Orte vier Meilen nach Westen zu gehe, und gehe darauf wieder 4 Meilen gerade zurück nach Osten; so bin ich wieder auf dem ersten Flecke, und bin mit diesen beiden Bewegungen um nichts weiter gekommen. Nun ist aber auch  $+ 4 - 4 = 0$ ; wo die 0 anzeigt, daß ich mich durch diese beiden Bewegungen von meinem ersten Orte um nichts, weder nach Westen noch nach Osten hin entfernt habe.

Ginge ich aber 8 Meilen westwärts ( $+ 8$ ) und 6 Meilen zurück Ostwärts ( $- 6$ ); so müßte ich

## 68 Zweites Kapitel. Vorbereitung

ich darauf von dem Orte meines Ausgehens noch um 2 Meilen nach Westen hin entfernt bleiben: es giebt aber auch  $+ 8 - 6 = + 2$ ; wo durch  $+ 2$  die 2 Meilen westwärts angezeigt werden. Ginge ich 10 Meilen westwärts, und darauf 16 Meilen gerade zurück nach Osten; so müste ich nach diesen beiden Bewegungen 6 Meilen nach Osten zu von dem Orte, wo ich ausgegangen war, entfernt sein. Es giebt aber auch  $+ 10 - 16 = - 6$ . In unserer Aufgabe wollen wir, weil dies gleichgültig ist, die Bewegungen nach Osten zu durch  $+$  und daher die entgegengesetzten Bewegungen nach Westen zu durch  $-$  bezeichnen.

§. 102.

### Auflösung.

Wir haben demnach der Ordnung nach folgende Bewegungen des Schiffes. Am ersten Mai  $+ 30$ , am 2ten  $+ 8$  und  $- 12$ , in der folgenden Nacht eine unbekannte Länge in unbekannter Richtung . . .  $x$ , den dritten Mai  $+ 10$ .

Nun ist mit allen diesen Bewegungen zusammengenommen das Schif bis an die Insel I gekommen, welche von der ersten Insel I noch 20 Meilen westwärts liegt. Demnach mus

$$\text{sein } + 30 + 8 - 12 \dots x + 10 = - 20.$$

$$\text{das ist } + 36 \dots x = - 20$$

Folglich . . .  $x = - 56$ , welches anzeigt, daß das Schif in der Nacht vom 2ten bis zum 3ten überhaupt um 56 Meilen nach Westen verschlagen ist.

§. 103.

§. 103.

Man könnte die Gleichung auch folgendermaßen ansetzen: Das Schif ist mit den wirklich gemachten Bewegungen bis in i gekommen: wenn es also ferner noch 20 Meilen nach Osten zu gesegelt wäre, so würde es von I um nichts entfernt, also  $30 + 8 - 12 \dots x + 10 + 20 = 0$  sein.

Diese Gleichung ist mit der vorhin angesetzten

$30 + 8 - 12 \dots x + 10 = -20$  völlig einerlei, und beide bestimmen einerlei Werth für  $\dots x$

§. 104.

Auf gleiche Art kan man die entgegengesetzte Beziehung, in welcher Einnahme und Ausgabe, Schulden und ausstehende Kapitalien, Druk und Gegendruk, Zug und Gegenzug, Ausfließen und Einfließen u. d. g. stehen, durch die beiden Zeichen  $+$  und  $-$  andeuten. Z. B. Wenn ich 100 Rthlr. Schulden, und 60 Rthlr. ausstehendes Kapital habe; so bin ich eigentlich nur 40 Rthlr. schuldig. Bezeichnet man nun die Zahl, welche die Schuld angeht, durch  $-$ , und die Zahl des ausstehenden Kapitals durch  $+$ ; so zeigt in  $-100 + 60 = -40$ , die  $-40$  an, daß ich, beides zusammen genommen, 40 Rthlr. schuldig bin. Oder bezeichnet man das schuldige Geld durch  $+$ , das vorrâthige aber durch  $-$ ; so erhält man  $+100 - 60 = +40$ ; wo nun die  $+40$ , vierzig Rthlr. Schuld anzeigen.

## 70 Drittes Kapitel. Von der

§ 105.

Wenn 60 Maß Wasser in ein Gefäß durch eine Röhre hinein, und 20 Maß durch eine andere wieder ausgeflossen sind; so ist es so gut, als ob nur 40 Maß hineingeflossen wären. Setzt man nun vor der Zahl der einfließenden Quantität Wassers das Zeichen +, vor der Zahl des ausfließenden Wassers das Zeichen —; so zeigt in  $+ 60 - 20 = + 40$  die Zahl + 40 an, daß 40 Maß Wasser mehr eingeflossen, als ausgeflossen; folglich auch 40 Maß in dem Gefäße zurückgeblieben sind.



## Drittes Kapitel.

### Von der algebraischen Addition und Subtraktion.

§. 106.

Wenn ich mehrere Zahlen, eine jede mit demjenigen Zeichen, welches ihr wegen der Natur derjenigen Sache, dessen GröÙe sie ausdrückt, in Beziehung auf eine andere zukömt, zusammen schreibe; so heißt die algebraisch addiren, und die ganze Reihe von Gliedern, welche dadurch entsteht, ist eine algebraische Summe. Z. B. Ich habe 60 Rthlr. vorräthiges Geld, 20 Rthlr. Schulden,

## algebr. Addition und Subtrakt. 77

100 Rthlr. noch zu bezahlendes, 30 Rthlr. einzunehmendes Geld und 200 Rthlr. ausstehendes Kapital; so ist folgende Reihe, 60 Rthlr. — 20 Rthlr. — 100 Rthlr. + 30 Rthlr. + 200 Rthlr. die algebraische Summe aller dieser Größen.

Man sagt ja auch schon im gemeinen Leben: Einnahme und Ausgabe, Schulden und Kapitalien, Inventarium, ic. zusammenengenommen haben wir so und so viel. In einem solchen Zusammennehmen mehrerer Größen besteht die algebraische Addition.

§. 107.

Demnach erhält man die algebraische Summe mehrerer Zahlen sogleich, dadurch, daß man alle diese Zahlen, eine jede mit dem ihr zukommenden Zeichen, als Glieder einer Reihe nebeneinander schreibt, und es ist,

$$\text{von } 3a - 4bc + d - 2g + 2b + mn + 9fg$$

$$\text{und } 5a - 2bc - d + 3g - gh + mn - 6fg$$

$$\text{die Summe } 5a + 3a - 4bc - 2bc + d - d + 2g + 3g + gh - gh + mn + mn + 9fg - 6fg$$

oder kürzer geschrieben:

$$8a - 6bc + 2 + 2b - gh + 2mn + 3fg$$

indem es weit bequemer und deutlicher ist

8a, als 5a + 3a, — 6bc, als — 4bc — 2bc u. s. w. zu schreiben.

§ 4

§. 108.

## 72 Zweites Kapitel. Von den

§. 108.

Daß eine algebraische Summe öfters kleiner werden mus, als ein Theil der Summe, fällt von selbst in die Augen. Die Summe von 80 Rthlr. Schuld und 100 Rthlr. vorräthigem Gelde ist 20. Die Summe von 100 Rthlr. Schuld und 80 Rthlr. vorräthigem Gelde ist ~~20~~ 20 *4 Rthlr.*

§. 109.

Es ist aber zu merken, daß man in der Algebra zu sagen pflegt: — 2 sei kleiner, als + 2, und zwar um 4 kleiner: denn erst — 2 und + 4 dazu genommen ist gleich 2. Mit eben dem Rechte kan man also auch sagen, daß — 8 kleiner sei, als — 6, und zwar um 2, denn — 8 + 2 gibt — 6; noch viel mehr ist — 8 kleiner als + 6; denn ich mus noch + 14 zu — 8 hinzusetzen, um + 6 zu erhalten.

§. 110.

Steht man indessen bloß auf die Menge der Einheiten, welche durch die Zahlen angedeutet werden (absolute), ohne auf die Beschaffenheit und gegenseitige Beziehung der Größen, oder auf die Zeichen +, —, Rücksicht zu nehmen; so ist es allerdings ausgemacht, daß — 8 absolute größer als — 6, — 8 absolute größer ist als + 6.

§. 111.

Algebraisch subtrahiren heißt zu zwei gegebenen Zahlen oder Zahlensummen eine dritte finden, welche



## algebr. Addition und Subtrakt. 73

welche angiebt, um wie viel die eine gegebne von der andern unterschieden ist.

### §. 112.

Von den beiden gegebenen Zahlen heist die eine, von welcher abgezogen wird, der Subtrahendus; die andere, welche abgezogen wird, der Subtrahent, und die dritte gefundene Zahl, welche angiebt, um wie viel der Subtrahent von dem Subtrahendus unterschieden ist, heist die Differenz, oder der Rest (residuum.)

### §. 113.

Es mus daher offenbar der Subtrahent und die Differenz zusammengenommen, das ist algebraisch addirt, den Subtrahendus geben; und umgekehrt mus diejenige Zahl, welche mit dem Subtrahenten zusammengenommen den Subtrahendus giebt, die richtige Differenz sein.

### §. 114.

Wenn ich 2 Zahlen A und B habe, welche aus mehreren Gliedern bestehen können; und alle Zeichen der B in die gerade entgegengesetzten verkehre, und mit so verkehrten Zeichen die B zur A addire; so mus die dadurch entstehende Summe, welche wir D nennen wollen, die Differenz sein zwischen dem Subtrahendus A und dem Subtrahenten B. Denn wenn ich zu dieser D aufs neue den Subtrahenten B mit seinen unveränderten Zeichen

E 5

addire;

addire; so entsteht die nun entstehende Summe in sich 1) den Subtrahent A, 2) den Subtrahent B mit verkehrten Zeichen und 3) den Subtrahent mit seinen eigentlichen Zeichen. Da nun die beiden letztern Theile bei 2) und 3) sich nothwendig einander ganz und gar aufheben und vernichten müssen, so gibt diese letzte Summe den Subtrahendus A; folglich ist D die richtige Differenz (§. 113.) Wenn A. B.

$$3a - 4cd + fg - m - xy$$

folgende 5 a — 2 c d + f g + m + r abzugiehet  
ist: so verkehre man jedes Zeichen vor den Gliedern des Subtrahenten, und addire denselben mit so verkehrten Zeichen zu dem Subtrahendus; so giebt die so entstehende Summe die verlangte Differenz. Zwischen den beiden hier angegebenen Zahlen ist demnach

$$3a - 5a - 4cd + 2cd + fg - fg - m$$

oder, der Deutlichkeit und Bequemlichkeit wegen,  
so kurz als möglich geschrieben,

$$-2a-2cd-2m \rightarrow xy-r, s$$

**Die Differenz:** denn wenn ich zu dieser Reihe den

Subtrahent  $5a - 2cd + fg + m + r,$

**addire, so mus ich nothwendig**

wieder  $3a - 4cd + fg - m - xy,$

als den Subtrahendus erhalten.

§. 115.

Demnach ist zwischen  $+a$  und  $+b$ , wenn  $b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $a - b$ , wenn  $a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $b - a$ .

Zwischen  $a$  und  $-b$ , wenn  $-b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $a + b$ , wenn  $a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $-a - b$ .

Zwischen  $-a$  und  $-b$ , wenn  $-b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $-a + b$ ; wenn  $-a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $+a - b$ .

§. 116.

Man pflegt in einigen Lehrbüchern für die ersten Anfänger diese Sätze auf eine andere Art vorzutragen, und sucht z. B. zu erforschen, was 30 Rthlr. Einnahme ( $+30$ ) von 20 Rthlr. Ausgabe ( $-20$ ) abgezogen wohl für eine Zahl geben müßten. Ein solches Abziehen kommt nach den Begriffen, die wir von Einnahme und Ausgabe haben, in keiner einzigen Rechnung vor; so wie überhaupt zwischen zweien Größen von verschiedenen Zeichen, in so fern diese Zeichen eine entgegengesetzte Beziehung der beiden Größen anzeigen, keine Subtraktion nach dem in der gemeinen Rechenkunst gewöhnlichen Begriffe stat finden kan. Wil man aber auf diese Weise solche Sätze, welche nur nach dem allgemeinen Begriffe der algebraischen Subtraktion einen geschickten Sin haben, nach dem weit eingeschränkten Begriffe, welcher in der gemeinen Arithmetik von

## 76 Drittes Kapitel. Von der

von der Subtraktion gegeben wird, erklären und deutlich machen; so ist dies ebenfalls ein unmögliches und schädliches Unternehmen. Wir wollen uns dafür lieber gleich anfangs gewöhnen nach einmal festgesetzten Begriffen und Erklärungen weiter fortzudenken, und wer die (§. 111.) gegebene Erklärung beständig vor Augen behält, der wird bei keinen von den daraus folgenden Sätzen die geringste Schwierigkeit finden.

### §. 117.

Wenn ich nemlich  $+ 30$  von  $- 20$  abziehen sol; so heist dies nichts anders, als daß ich eine Zahl finden solle, welche angiebt, um wie viel  $+ 30$  von  $- 20$  verschieden sei, und welche Zahl zu  $+ 30$  hinzugethan  $- 20$  gebe. Nach (§. 114.) finde ich diesen Unterschied  $= - 20 - 30 = - 50$ ; und in der That ist  $+ 30$  um  $- 50$  von  $- 20$  unterschieden; denn ich müste gerade noch  $- 50$  zu  $+ 30$  hinzuthun, um  $- 20$  zu erhalten, indem  $+ 30 - 50 = - 20$ . Die Differenz  $- 50$  zeigt also auch an, daß der Subtrahent  $- 20$  um 50 kleiner sei als der Subtrahendus  $+ 30$ , und umgekehrt der Subtrahendus  $+ 30$  um 50 größer als der Subtrahent  $- 20$ , nach den (§. 109.) gegebenen

nen

## algebr. Addition und Subtrakt. 77

nen Begriffen von der Größe und Kleinheit der algebraischen Zahlen.

§. 118.

Eben so, wenn ich von  $-10$  die Zahl  $-6$  abziehen sol, so heist das nicht anders, als daß ich eine Zahl finden sol, welche anzeigt, um wie viel die  $-6$  von der  $-10$  unterschieden sei, oder was für eine Zahl ich zur  $-6$  hinzuthun müsse, um  $-10$  zu erhalten. Ich finde nun nach der §. 114. gegebenen Regel diese Differenz  $= -10 + 6 = -4$ , welches anzeigt, daß ich noch  $-4$  zur  $-6$  hinzuthun, das ist  $-6$  noch um 4 kleiner machen müsse, um  $-10$  zu erhalten. Und dieses ist wiederum vollkommen wahr, indem nach §. 114.  $-10$  um 4 kleiner ist, als  $-6$ .

§. 119.

### XXX. Aufgabe.

Ein Kaufman vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimt aber alle Jahr zur Erhaltung seiner Familie 100 Pfund Sterling davon weg, und wird nach drei Jahren noch einmal so reich, als er anfangs war. Wie viel Pfund Sterling hat er Anfangs gehabt?

§. 120.

# 78. Drittes Kapitel. Von der

§. 120.

## Auflösung.

Ausdruck in Worten.

- 1) Ein Kaufman besitzt gewisse Pfund Sterling.
- 2) Davon legt er beim Anfang des ersten Jahres 100 Pfund weg.
- 3) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil.
- 4) Beim Anfang des zweiten Jahres nimt er wieder 100 Pf. Sterl. davon
- 5) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil
- 6) Mit Anfang des dritten Jahres legt er wieder 100 Pfund zurück
- 7) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil
- 8) Nun ist er noch einmal so reich, als er anfangs war.

Ausdruck in algebraischen Zeichen.

$$\begin{aligned}
 & x \\
 & x - 100 \\
 & x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \\
 & = \frac{3x - 300}{3} + \frac{x - 100}{3} = \\
 & = \frac{4x - 400}{3} \\
 & \frac{4x - 400}{3} - 100 = \\
 & = \frac{4x - 700}{3} \\
 & \frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{3} = \\
 & = \frac{16x - 2800}{9} \\
 & \frac{16x - 2800}{9} - 100 = \\
 & = \frac{16x - 3700}{9} \\
 & \frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{9} = \\
 & = \frac{64x - 14800}{27} \\
 & \frac{64x - 14800}{27} = 2x
 \end{aligned}$$

Diese

## algebr. Addition und Subtrakt. 79

Diese Gleichung multiplicire man durch 27; so er-

hält man  $64x - 14800 = 54x$ ,

$54x$  subtrahirt, bleibt  $10x - 14800 = 0$

$14800$  addirt, komt  $10x = 14800$

daher  $x = \frac{14800}{10} = 1480$ ,

welches sein anfängliches Vermögen war.

§. 121.

### XXXI. Aufgabe.

Einer hat Muskatennüsse gekauft, und sagt, daß 5 Stük eben so viel über 10 Pfennige kosten, als 6 Stük unter 34 Pfennige kosten. Wie viel kostete das Stük?

§. 122.

#### Auflösung.

Ein Stük koste  $x$  Pfennige, so kosten 5 Stük  $5x$  Pf. und 6 Stük  $6x$  Pf. Es sol also sein  $5x - 10 = 34 - 6x$ . (die Differenz zwischen  $5x$  und 10 gleich der Differenz zwischen 34 und  $6x$ )  
Daher  $11x = 44$ , und also  $x = 4$ .

§. 123.

### XXXII. Aufgabe.

Suche eine Zahl: wenn ich 1) diese Zahl duplire, 2) von diesem Duplo subtrahire 1, 3) den Rest duplire, 4) davon 2 subtrahire, 5) den Rest durch

## 72 Zweites Kapitel Von den

§. 108.

Daß eine algebraische Summe öfters kleiner werden mus, als ein Theil der Summe, fällt von selbst in die Augen. Die Summe von 80 Rthlr. Schuld und 100 Rthlr. vorräthigem Gelde ist 20. Die Summe von 100 Rthlr. Schuld und 80 Rthlr. vorräthigem Gelde ist ~~20~~ 20 *Schul*

§. 109.

Es ist aber zu merken, daß man in der Algebra zu sagen pflegt: — 2 sei kleiner, als + 2, und zwar um 4, kleiner: denn erst — 2 und + 4 dazu genommen ist gleich 2. Mit eben dem Rechte kan man also auch sagen, daß — 8 kleiner sei, als — 6, und zwar um 2, denn — 8 + 2 gibt — 6; noch viel mehr ist — 8 kleiner als + 6; denn ich mus noch + 14 zu — 8 hinzusetzen, um + 6 zu erhalten.

§. 110.

Steht man indessen bloß auf die Menge der Einheiten, welche durch die Zahlen angedeutet werden (absolute), ohne auf die Beschaffenheit und gegenseitige Beziehung der Größen, oder auf die Zeichen +, —, Rücksicht zu nehmen; so ist es allerdings ausgemacht, daß — 8 absolute grösser als — 6, — 8 absolute grösser ist als + 6.

§. 111.

Algebraisch subtrahiren heisst zu zwei gegebenen Zahlen oder Zahlensummen eine dritte finden, welche



## algebr. Addition und Subtrakt. 73

welche angiebt, um wie viel die eine gegebne von der andern unterschieden ist.

### §. 112.

Von den beiden gegebenen Zahlen heist die eine, von welcher abgezogen wird, der Subtrahendus, die andere, welche abgezogen wird, der Subtrahent, und die dritte gefundene Zahl, welche angiebt, um wie viel der Subtrahent von dem Subtrahendus unterschieden ist, heist die Differenz, oder der Rest (residuum.)

### §. 113.

Es mus daher offenbar der Subtrahent und die Differenz zusammengenommen, das ist algebraisch addirt, den Subtrahendus geben; und umgekehrt mus diejenige Zahl, welche mit dem Subtrahenden zusammengenommen den Subtrahendus giebt, die richtige Differenz sein.

### §. 114.

Wenn ich 2 Zahlen A und B habe, welche aus mehreren Gliedern bestehen können; und alle Zeichen der B in die gerade entgegengesetzten verkehre, und mit so verkehrten Zeichen die B zur A addire; so mus die dadurch entstehende Summe, welche wir D nennen wollen, die Differenz sein zwischen dem Subtrahendus A und dem Subtrahenten B. Denn wenn ich zu dieser D aufs neue den Subtrahenten B mit seinen unveränderten Zeichen

E 5

addire;

addire; so entsteht die nun entstehende Summe in sich 1) den Subtrahent A, 2) den Subtrahent B mit verkehrten Zeichen und 3) den Subtrahent mit seinen eigentlichen Zeichen. Da nun die beiden letztern Theile bei 2) und 3) sich nothwendig einander ganz und gar aufheben und vernichten müssen, so gibt diese letzte Summe den Subtrahendus A; folglich ist D die richtige Differenz (§. 113.) Wenn A. B.

§. 115.

Demnach ist zwischen  $+a$  und  $+b$ , wenn  $b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $a - b$ , wenn  $a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $b - a$ .

Zwischen  $a$  und  $-b$ , wenn  $-b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $a + b$ , wenn  $a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $-a - b$ .

Zwischen  $-a$  und  $-b$ , wenn  $-b$  der Subtrahent ist, die Differenz  $-a + b$ ; wenn  $-a$  der Subtrahent ist, die Differenz  $+a - b$ .

§. 116.

Man pflegt in einigen Lehrbüchern für die ersten Anfänger diese Sätze auf eine andere Art vorzutragen, und sucht z. B. zu erforschen, was 30 Rthlr. Einnahme ( $+30$ ) von 20 Rthlr. Ausgabe ( $-20$ ) abgezogen wohl für eine Zahl geben müßten. Ein solches Abziehen kommt nach den Begriffen, die wir von Einnahme und Ausgabe haben, in keiner einzigen Rechnung vor; so wie überhaupt zwischen zweien Größen von verschiednen Zeichen, in so fern diese Zeichen eine entgegengesetzte Beziehung der beiden Größen anzeigen, keine Subtraktion nach dem in der gemeinen Rechenkunst gewöhnlichen Begriffe stat finden kan. Wil man aber auf diese Weise solche Sätze, welche nur nach dem allgemeinen Begriffe der algebraischen Subtraktion einen geschickten Sin haben, nach dem weit eingeschränkten Begriffe, welcher in der gemeinen Arithmetik von

## 76 Drittes Kapitel. Von der

von der Subtraktion gegeben wird, erklären und deutlich machen; so ist dies ebenfalls ein unmögliches und schädliches Unternehmen. Wir wollen uns dafür lieber gleich anfangs gewöhnen nach einmal festgesetzten Begriffen und Erklärungen weiter fortzudenken, und wer die (§. 111.) gegebene Erklärung beständig vor Augen behält, der wird bei Keinen von den daraus folgenden Sätzen die geringste Schwierigkeit finden.

### §. 117.

Wenn ich nemlich  $+ 30$  von  $- 20$  abziehen sol; so heist dies nichts anders, als daß ich eine Zahl finden solle, welche angiebt, um wie viel  $+ 30$  von  $- 20$  verschieden sei, und welche Zahl zu  $+ 30$  hinzugethan  $- 20$  gebe. Nach (§. 114.) finde ich diesen Unterschied  $= - 20 - 30 = - 50$ ; und in der That ist  $+ 30$  um  $- 50$  von  $- 20$  unterschieden; denn ich müste gerade noch  $- 50$  zu  $+ 30$  hinzuthun, um  $- 20$  zu erhalten, indem  $+ 30 - 50 = - 20$ . Die Differenz  $- 50$  zeigt also auch an, daß der Subtrahent  $- 20$  um 50 kleiner sei als der Subtrahendus  $+ 30$ , und umgekehrt der Subtrahendus  $+ 30$  um 50 größer als der Subtrahent  $- 20$ , nach den (§. 109.) gegebenen

nen

## algebr. Addition und Subtrakt. 77

nen Begriffen von der Größe und Kleinheit der algebraischen Zahlen.

§. 118.

Eben so, wenn ich von  $-10$  die Zahl  $-6$  abziehen sol, so heist das nicht anders, als daß ich eine Zahl finden sol, welche anzeigt, um wie viel die  $-6$  von der  $-10$  unterschieden sei, oder was für eine Zahl ich zur  $-6$  hinzuthun müsse, um  $-10$  zu erhalten. Ich finde nun nach der §. 114. gegebenen Regel diese Differenz  $= -10 + 6 = -4$ , welches anzeigt, daß ich noch  $-4$  zur  $-6$  hinzuthun, das ist  $-6$  noch um 4 kleiner machen müsse, um  $-10$  zu erhalten. Und dieses ist wiederum vollkommen wahr, indem nach §. 114.  $-10$  um 4 kleiner ist, als  $-6$ .

§. 119.

### XXX. Aufgabe.

Ein Kaufman vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimt aber alle Jahr zur Erhaltung seiner Familie 100 Pfund Sterling davon weg, und wird nach drei Jahren noch einmal so reich, als er anfangs war. Wie viel Pfund Sterling hat er Anfangs gehabt?

§. 120.

# 78. Drittes Kapitel. Von der

§. 120.

## Auflösung.

### Ausdruck in Worten.

1) Ein Kaufman besitzt gewisse Pfund Sterling.

2) Davon legt er beim Anfang des ersten Jahres 100 Pfund weg.

3) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil.

4) Beim Anfang des zweiten Jahres nimt er wieder 100 Pf. Sterl. davon

5) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil

6) Mit Anfang des dritten Jahres legt er wieder 100 Pfund zurück

7) Den Rest vermehrt er um den dritten Theil

8) Nun ist er noch einmal so reich, als er anfangs war.

### Ausdruck in algebraischen Zeichen.

$x$

$x - 100$

$x - 100 + x - 100 =$

$= \frac{3x - 300}{3} + \frac{x - 100}{3} =$

$= \frac{4x - 400}{3}$

$\frac{4x - 400}{3} - 100 =$

$= \frac{4x - 700}{3}$

$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{3} =$

$= \frac{16x - 2800}{3}$

$\frac{16x - 2800}{3} - 100 =$

$= \frac{16x - 3700}{3}$

$\frac{16x - 3700}{3} + \frac{16x - 3700}{3} =$

$= \frac{64x - 14800}{3}$

$\frac{64x - 14800}{3} = 2x$

Diese

## algebr. Addition und Subtrakt. 79

Diese Gleichung multiplicire man durch 27; so er-

hält man  $64x - 14800 = 54x$ ,

$54x$  subtrahirt, bleibt  $10x - 14800 = 0$

$14800$  addirt, komt  $10x = 14800$

daher  $x = \frac{14800}{10} = 1480$ ,

welches sein anfängliches Vermögen war.

§. 121.

### XXXI. Aufgabe.

Einer hat Mustatennüsse gekauft, und sagt, daß 5 Stük eben so viel über 10 Pfennige kosten, als 6 Stük unter 34 Pfennige kosten. Wie viel kostete das Stük?

§. 122.

#### Auflösung.

Ein Stük koste  $x$  Pfennige, so kosten 5 Stük  $5x$  Pf. und 6 Stük  $6x$  Pf. Es sol also sein  $5x - 10 = 34 - 6x$ . (die Differenz zwischen  $5x$  und 10 gleich der Differenz zwischen 34 und  $6x$ )  
Daher  $11x = 44$ , und also  $x = 4$ .

§. 123. /

### XXXII. Aufgabe.

Suche eine Zahl: wenn ich 1) diese Zahl duplire, 2) von diesem Duplo subtrahire 1, 3) den Rest duplire, 4) davon 2 subtrahire, 5) den Rest durch

## 80 Drittes Kapitel. Von der

durch 4 dividire, daß eins weniger herauskomme als die angenommene Zahl.

§. 124.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei  $x$ ; so ist 1) das Duplum derselben  $2x$ , davon 2) 1 subtrahirt, bleibt  $2x - 1$ ; dieser Rest 3) duplirt, giebt  $4x - 2$ , davon 4) 2 subtrahirt, bleibt  $4x - 4$ , diese Differenz 5) durch 4 dividirt, komt  $\frac{4x - 4}{4}$ , welches nun um 1 weniger

sein sol, als die gesuchte Zahl. Folglich mus  $x$  dergestalt genommen werden, daß

$$\frac{4x - 4}{4} = x - 1$$

oder  $x - 1 = x - 1$  sei, welches sein wird wenn  $x = x$ .

Da nun eine jede Zahl dieser letzten Forderung Genüge thut, indem eine jede Zahl sich selbst gleich ist, so erfüllt eine jede beliebige Zahl die Forderungen dieser Aufgabe.

§. 125.

XXXIII. Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Die Summe der beiden Zahlen sei  $= s$ .

Die Differenz derselben  $= d$ .

Die eine von den gesuchten Zahlen  $= x$ ,  
die andere  $= y$ ; so ist

§. 126.



§. 126.

Auflösung.

I)  $x + y = s$

II)  $x - y = d$ . Addirt man die linken und rechten Seiten beider Gleichungen; so erhält man (§. 47.)  $2x = s + d$ , daher  $x = \frac{s + d}{2}$ . Um

eine ähnliche Formel für  $y$  zu erhalten, darf man nur die zweite Gleichung von der ersten abziehen; so hat man (§. 48. §. 114.)

$$x + y - x + y = s - d$$

oder  $2y = s - d$ , daher  $y = \frac{s - d}{2}$ .

§. 127.

Durch die Addition der beiden Gleichungen erhielten wir hier eine neue sehr einfache Gleichung, worin die eine unbekannte Zahl  $y$  weggefallen, und nur noch die andere  $x$  enthalten war, so daß durch Anwendung der gewöhnlichen Auflösungsregeln der Werth von  $x$  in lauter gegebenen und bekanten Zahlen angegeben werden konnte; und eben so ergab sich durch die Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten eine neue Gleichung, worin  $x$  weggefallen und nur noch  $y$  vorhanden war. Man wird aber, wie leicht einzusehen ist, auf diese Art nicht bei allen Gleichungen zu seinem Zwecke gelangen, und die in der 24 Aufgabe angewandte Methode ist weit allgemeiner, ja für solche Gleichungen, als wir bis jetzt kennen, ganz allgemein, um aus zweien

§ Gleichun-

## 82. Drittes Kapitel. Von der

Gleichungen, worinnen zwei unbekannte Größen vorkommen, die Werthe dieser unbekannten Größen durch lauter bekannte Größen zu bestimmen.

§. 128.

Wolte man die beiden Gleichungen

$$\text{I) } x + y = s \quad \text{und} \quad \text{II) } x - y = d$$

nach dieser Methode auflösen; so würde man den Werth von  $x$  aus der ersten Gleichung finden,  $x = s - y$ , den Werth von  $x$  aus der zweiten Gleichung  $x = d + y$ , und aus diesen beiden Gleichungen eine neue folgern, worin kein  $x$  mehr ist, nemlich  $d + y = s - y$ ,

$$\text{also auch } d + 2y = s$$

$$\text{auch } 2y = s - d, \text{ und daher } y = \frac{s - d}{2}$$

Setzt man nun ferner in die erste Gleichung  $x + y = s$ , stat  $y$  den Werth desselben  $\frac{s - d}{2}$ ;

so erhält man die Gleichung

$$x + \frac{s - d}{2} = s, \text{ worin kein } y \text{ ist,}$$

$$\text{oder (§. 39.) } x + \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = s$$

$$\text{folglich } x = s - \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s + d}{2}$$

§. 129.

## algebr. Addition und Subtrakt. 83

§. 129.

Wenn nun  $s = 14$ ,  $d = 6$  gegeben wird; so ist die eine Zahl  $x = \frac{14 + 6}{2} = 10$ , die

andere  $y = \frac{14 - 6}{2} = 4$ . Wenn sein sol

$s = -6$ ,  $d = 4$ ; so wird  $x = \frac{-6 + 4}{2} = -1$

und  $y = \frac{-6 - 4}{2} = -5$ ; und es ist auch die

Summe von  $-1$  und  $-5$ ,  $= -6$ , die Differenz von  $-1$  und  $-5 = -1 + 5 = 4$ .

Wenn ich zwei Zahlen suchen sol, deren Summe ist 6, deren Differenz 9; so finde ich die eine Zahl  $x = \frac{6 + 9}{2} = 7\frac{1}{2}$ , die andere Zahl

$y = \frac{6 - 9}{2} = -1\frac{1}{2}$ ; und es ist in der That

die Summe von  $7\frac{1}{2}$  und  $-1\frac{1}{2}$  gleich 6, die Differenz zwischen  $7\frac{1}{2}$  und  $-1\frac{1}{2}$  gleich  $7\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 9$ .

§. 130.

Wenn beide Zahlen,  $x$  und  $y$ , positiv sind, und der Subtrahent  $y$  kleiner ist, als der Subtrahendus  $x$ ; so wird sowohl die Summe  $s$  als auch die Differenz  $d$  positiv, so daß  $x$ , welches  $= \frac{s + d}{2}$

allermal größer sein mus, als  $y$ , welches  $= \frac{s - d}{2}$ .

§ 2

Daher

## 84 Drittes Kapitel. Von der

Daher gilt für diesen Fall die nützliche Regel, daß man bei gegebener Summe und Differenz zweier unbekannten Zahlen die größte Zahl findet, wenn man die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere aber, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

§. 131.

Wenn  $-6 + 3 = -\frac{1}{2} - 4$ , so mus auch  $+6 - 3 = -\frac{1}{2} + 4$ , und überhaupt wenn

1)  $a - x = p - nr + 9$  sein sol, auch nachdem man das Zeichen eines jeden Gliedes verkehrt hat

2)  $-a + x = -p + nr - 9$  sein; denn wenn  $a - x = p - nr + 9$ , so mus auch nach §. 62.  $-p + nr - 9 = -a + x$  sein, und diese letztere Gleichung ist offenbar mit der bei 2) völlig einerlei.

§. 132.

### XXXIV. Aufgabe.

Suche eine Zahl, deren Drittel, Viertel und Fünftel zusammenaddirt eine Zahl gibt, welche um 13 größer ist, als die gesuchte Zahl selbst.

§. 133.

# algebr. Addition und Subtrakt. 85

## §. 133. Auflösung.

Wenn  $x$  die verlangte Zahl ist; so ist

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

$$\text{oder } \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

$$\text{das ist } \frac{7x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13. \text{ Daher auch durch 12}$$

$$\text{multiplicirt, } 7x + \frac{12x}{5} = 12x + 12 \cdot 13, \text{ und durch 5}$$

$$\text{multiplicirt auch } 35x + 12x = 60x + 5 \cdot 12 \cdot 13;$$

$$\text{also auch } 47x - 60x = 60 \cdot 13,$$

$$\text{das ist } -13x = 60 \cdot 13.$$

$$\text{Daher auch (§. 131.) } 13x = -60 \cdot 13$$

$$\text{also } x = -60.$$

Es ist nun  $-\frac{60}{3}$  und  $-\frac{60}{4}$  und  $-\frac{60}{5}$  zusammen-  
genommen  $= -20 - 15 - 12 = -47$ , und  $-47$   
ist allerdings um 13 größer als  $-60$ . (§. 109.)

## §. 134.

Durch eine geschifte Multiplikation der Gleichung ist man allemal im Stande, alle Divisoren aus einer jeden Gleichung fortzuschaffen. In dieser Absicht darf man nur z. B. in folgender Gleichung

$$\frac{fg}{pq} - \frac{x}{n} = \frac{b}{x}$$

entweder nach und nach durch die Divisoren  $pq$ ,  $n$ ,  $x$ , oder auch mit einemmale durch das Produkte derselben  $pqn$ , beide Seiten multipliciren, so erhält man

$$\frac{pqnfgx}{pq} - \frac{pqnx}{n} = \frac{pqnbx}{x}$$

$$\text{oder } nfgx - pqxx = pqnb.$$

## 84 Drittes Kapitel. Von der

Daher gilt für diesen Fall die nützliche Regel, daß man bei gegebener Summe und Differenz zweier unbekannten Zahlen die größte Zahl findet, wenn man die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere aber, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

§. 131.

Wenn  $-6 + 3 = -\frac{1}{2} - 4$ , so mus auch  $+6 - 3 = -\frac{1}{2} + 4$ , und überhaupt wenn

1)  $a - x = p - nr + 9$  sein sol, auch nachdem man das Zeichen eines jeden Gliedes verkehrt hat

2)  $-a + x = -p + nr - 9$  sein; denn wenn  $a - x = p - nr + 9$ , so mus auch nach §. 62.  $-p + nr - 9 = -a + x$  sein, und diese letztere Gleichung ist offenbar mit der bei 2) völlig einerlei.

§. 132.

### XXXIV. Aufgabe.

Suche eine Zahl, deren Drittel, Viertel und Fünftel zusammenaddirt eine Zahl gibt, welche um 13 größer ist, als die gesuchte Zahl selbst.

§. 133.

§. 133. Auflösung.

Wenn  $x$  die verlangte Zahl ist; so ist

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

oder  $\frac{4x}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13,$

das ist  $\frac{7x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13$ . Daher auch durch 12

multiplicirt,  $7x + \frac{12x}{5} = 12x + 12 \cdot 13$ , und durch 5

multiplicirt auch  $35x + 12x = 60x + 5 \cdot 12 \cdot 13$ ;

also auch  $47x - 60x = 60 \cdot 13$ ,

das ist  $-13x = 60 \cdot 13$ .

Daher auch (§. 131.)  $13x = -60 \cdot 13$

also  $x = -60$ .

Es ist nun  $-\frac{60}{3}$  und  $-\frac{60}{4}$  und  $-\frac{60}{5}$  zusammen-  
genommen  $= -20 - 15 - 12 = -47$ , und  $-47$   
ist allerdings um 13 größer als  $-60$ . (§. 109.)

§. 134.

Durch eine geschickte Multiplikation der Gleichung ist man allemal im Stande, alle Divisoren aus einer jeden Gleichung fortzuschaffen. In dieser Absicht darf man nur z. B. in folgender Gleichung

$$\frac{fg}{pq} - \frac{x}{n} = \frac{b}{x}$$

entweder nach und nach durch die Divisoren  $pq$ ,  $n$ ,  $x$ , oder auch mit einemmale durch das Produkte derselben  $pqn$ , beide Seiten multipliciren, so erhält man  $\frac{pqnfgx}{pq} - \frac{pqnx}{n} = \frac{pqnbx}{x}$

oder  $nfgx - pqxx = pqnb$ .

## 86. Drittes Kap. Von der algebr. 1c.

### §. 135. XXXV. Aufgabe.

Wenn ich zwei Brüche von gleichen Zählern,  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{2}{2}$ , nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst, unter einerlei Benennung bringe und addire; so erhalte ich den neuen Bruch  $\frac{1+2}{2}$ , als die Summe der beiden Brüche. Nun sehe ich, daß dieser Bruch  $\frac{1+2}{2}$  sogleich herauskommt, wenn ich die Summe der beiden Nenner ( $5 + 3$ ) durch den gemeinschaftlichen Zähler 2 multiplicire, und unter dieses Product das Product der beiden Nenner als Divisor schreibe: wird mir ein solches Verfahren allemal die Summe zweier Brüche von gleichen Zählern geben?

### §. 136. Auflösung.

Man drücke zwei Brüche von gleichen Zählern allgemein aus durch  $a$  und  $a$ , und bringe nach

den Regeln der gemeinen Rechenkunst beide unter einerlei Nenner, indem man Zähler und Nenner eines jeden Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt, so erhält man  $\frac{ap}{pq}$  und  $\frac{aq}{pq}$ ; beide addirt,

gibt  $\frac{ap}{pq} + \frac{aq}{pq} = \frac{ap + aq}{pq} = a(p + q)$ , (§. 21.)

und aus dieser Gleichung erhellet, daß das angegebene Verfahren allemal die richtige Summe solcher Brüche geben wird. Eben so kan nach folgenden Gleichungen  $\frac{a}{p} - \frac{a}{q} = \frac{aq - ap}{pq} = a(q - p)$  die

Differenz  $\frac{a}{p} - \frac{a}{q}$  auf eine ähnliche Weise mit Vortheil berechnet werden.

Viertes



## Viertes Kapitel.

### Von den Decimalbrüchen.

§. 137.

Nach dem bekanten Geseze unserer allgemein eingeführten Decimalzahlen bedeutet, z. B. in 333 die äußerste 3 an der linken Seite 10 mal mehr, als die um eine Decimalstelle weiter nach der Rechten zu stehende 3, und diese mittlere 3 wieder 10 mal mehr als die zunächst zur Rechten geschriebene 3, so daß diese Zahl gelesen wird dreihundert, dreißig und drei. Wenn man nun annimmt, daß das Komma in 333,3333 ein für allemal die Stelle der Einer anzeigt, übrigens aber nach dem vorigen Geseze jede Ziffer, welche um eine Stelle weiter zur Rechten hin steht, 10 mal weniger als die nach der linken ihr zunächst stehende bedeuten solle; so wird die Zahl 333,3333 zu lesen sein: dreihundert, dreißig und drei; 3 Zehntel, 3 Hundertel, 3 Tausendtel und 3 Zehntausendtel. Und folgende Zahl, 24,523, wird so viel sein als  $20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ .

§. 138.

Bei einer Zahl, welche ganz ohne ein solches Einheitskomma geschrieben ist, wird allemal angenommen, daß die äußerste Zahl der rechten Seite

§ 4

an

an der Stelle der Einer stehe, so daß 856 so viel ist, als 856, und 120 so viel ist, als 120,

## §. 139.

240 ist zehnmal mehr als 24, weil durch die zu 24 geschriebne 0 in 240, die 4 von der Stelle der Einer in die Stelle der Zehner, und die 2 von ihrer Stelle der Zehner in die Stelle der Hunderte verrückt wird. Es ist aber 24,0 oder auch 24,000 nichts mehr, als 24, weil so wenig durch angeschriebne Nullen, als durch andere hinzugeschriebne Zahlen, die durch das (,) nunmehr bestimmte Stelle der Einer weiter verrückt werden kan.

## §. 140.

Da nun  $524,3 = 500 + 20 + 4 + \frac{3}{10}$ ,

aber  $52,43 = 50 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$  ist; so sieht man deutlich ein, daß ein jedes Theil der Zahl  $524,3$  also auch die ganze Zahl selbst um 10 mal kleiner dadurch wird, daß man das Einheitskomma um eine Decimalstelle weiter nach der linken zu rückt. Und da auf eben die Art

$806,2 = 800 + 0 + 6 + \frac{2}{10}$

aber  $80,62 = 80 + 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100}$

und  $8,062 = 8 + 0 + \frac{6}{100} + \frac{2}{1000}$

und  $0,8062 = \frac{8}{1000} + 0 + \frac{6}{10000} + \frac{2}{100000}$  ist;

so leuchtet überhaupt gar leicht ein, daß eine jede Zahl um zehnmal, hundertmal oder 1000 mal 10. kleiner wird, indem man das Einheitskomma um ein

## Von den Decimalbrüchen. 89

ein, zwei oder drei  $\times$ . Decimalstellen weiter nach der Linken zu hinausrückt.

### §. 141.

Umgekehrt mus also auch eine jede Decimalzahl um 10, 100, 1000 mal  $\times$ . größer werden, wenn man das Einheitskomma um eine, zwei, drei  $\times$ . Decimalstellen nach der Rechten zu fortrückt. Es mus z. B. 3460, tausendmal größer sein, als 3,460 welches auch durch sich selbst schon klar ist, indem  $3,460 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + 0$ ,  
aber  $3460, = 3000 + 400 + 60 + 0$  ist.

### §. 142.

Nach dieser Einrichtung können nicht nur mehrere Decimalbrüche von verschiednen Nennern auf eine ungemein bequeme Weise geschrieben werden, indem man z. B. stat  $30 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$  schreibt 30,465 stat  $\frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$  schreibt 0,0506; sondern es können auch alle Regeln für die Addition, Subtraktion und Division in ganzen Decimalzahlen auf diese Decimalbrüche angewandt werden.

### §. 143.

So wird z. B. von 8,04374  
und 23,9825

die Summe sein  $\begin{array}{r} 32,02624 \\ (1) (1) (1) \end{array}$

§ 5

denn

## 82. Drittes Kapitel. Von der

Gleichungen, worinnen zwei unbekannte Größen vorkommen, die Werthe dieser unbekannten Größen durch lauter bekannte Größen zu bestimmen.

§. 128.

Wolte man die beiden Gleichungen

$$I) x + y = s \quad \text{und} \quad II) x - y = d$$

nach dieser Methode auflösen; so würde man den Werth von  $x$  aus der ersten Gleichung finden,  $x = s - y$ , den Werth von  $x$  aus der zweiten Gleichung  $x = d + y$ , und aus diesen beiden Gleichungen eine neue folgern, worin kein  $x$  mehr ist, nemlich  $d + y = s - y$ ,

$$\text{also auch } d + 2y = s$$

$$\text{auch } 2y = s - d, \text{ und daher } y = \frac{s - d}{2}$$

Schreibt man nun ferner in die erste Gleichung  $x + y = s$ , stat  $y$  den Werth desselben  $\frac{s - d}{2}$ ;

so erhält man die Gleichung

$$x + \frac{s - d}{2} = s, \text{ worin kein } y \text{ ist,}$$

$$\text{oder (§. 39.) } x + \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = s$$

$$\text{folglich } x = s - \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2} = \frac{s + d}{2}$$

§. 129.

# algebr. Addition und Subtrakt. 83

§. 129.

Wenn nun  $s = 14$ ,  $d = 6$  gegeben wird; so ist die eine Zahl  $x = \frac{14 + 6}{2} = 10$ , die

andere  $y = \frac{14 - 6}{2} = 4$ . Wenn sein sol

$s = -6$ ,  $d = 4$ ; so wird  $x = \frac{-6 + 4}{2} = -1$

und  $y = \frac{-6 - 4}{2} = -5$ ; und es ist auch die

Summe von  $-1$  und  $-5$ ,  $= -6$ , die Differenz von  $-1$  und  $-5 = -1 + 5 = 4$ .

Wenn ich zwei Zahlen suchen sol, deren Summe ist 6, deren Differenz 9; so finde ich die eine Zahl  $x = \frac{6 + 9}{2} = 7\frac{1}{2}$ , die andere Zahl

$y = \frac{6 - 9}{2} = -\frac{3}{2}$ ; und es ist in der That

die Summe von  $7\frac{1}{2}$  und  $-1\frac{1}{2}$  gleich 6, die Differenz zwischen  $7\frac{1}{2}$  und  $-1\frac{1}{2}$  gleich  $7\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 9$ .

§. 130.

Wenn beide Zahlen,  $x$  und  $y$ , positiv sind, und der Subtrahent  $y$  kleiner ist, als der Subtrahendus  $x$ ; so wird sowohl die Summe  $s$  als auch die Differenz  $d$  positiv, so daß  $x$ , welches  $= \frac{s + d}{2}$

allermal größer sein mus, als  $y$ , welches  $= \frac{s - d}{2}$ .

§ 2

Daher

## 84 Drittes Kapitel. Von der

Daher gilt für diesen Fall die nützliche Regel, daß man bei gegebener Summe und Differenz zweier unbekannten Zahlen die größte Zahl findet, wenn man die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere aber, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

§. 131.

Wenn  $-6 + 3 = -\frac{1}{2} - 4$ , so mus auch  $+6 - 3 = -\frac{1}{2} + 4$ , und überhaupt wenn

1)  $a - x = p - nr + 9$  sein sol, auch nachdem man das Zeichen eines jeden Gliedes verkehrt hat

2)  $-a + x = -p + nr - 9$  sein; denn wenn  $a - x = p - nr + 9$ , so mus auch nach §. 62.  $-p + nr - 9 = -a + x$  sein, und diese letztere Gleichung ist offenbar mit der bei 2) völlig einerlei.

§. 132.

### XXXIV. Aufgabe.

Suche eine Zahl, deren Drittel, Viertel und Fünftel zusammenaddirt eine Zahl gibt, welche um 13 größer ist, als die gesuchte Zahl selbst.

§. 133.

§. 133. Auflösung.

Wenn  $x$  die verlangte Zahl ist; so ist

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

$$\text{oder } \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13,$$

$$\text{das ist } \frac{7x}{12} + \frac{x}{5} = x + 13. \text{ Daher auch durch 12}$$

$$\text{multiplicirt, } 7x + \frac{12x}{5} = 12x + 12 \cdot 13, \text{ und durch 5}$$

$$\text{multiplicirt auch } 35x + 12x = 60x + 5 \cdot 12 \cdot 13;$$

$$\text{also auch } 47x - 60x = 60 \cdot 13,$$

$$\text{das ist } -13x = 60 \cdot 13.$$

$$\text{Daher auch (§. 131.) } 13x = -60 \cdot 13$$

$$\text{also } x = -60.$$

Es ist nun  $-\frac{60}{3}$  und  $-\frac{60}{4}$  und  $-\frac{60}{5}$  zusammen-  
genommen  $= -20 - 15 - 12 = -47$ , und  $-47$   
ist allerdings um 13 größer als  $-60$ . (§. 109.)

§. 134.

Durch eine geschickte Multiplikation der Gleichung ist man allemal im Stande, alle Divisoren aus einer jeden Gleichung fortzuschaffen. In dieser Absicht darf man nur z. B. in folgender Gleichung

$$\frac{fg}{pq} - \frac{x}{n} = \frac{b}{x}$$

entweder nach und nach durch die Divisoren  $pq$ ,  $n$ ,  $x$ , oder auch mit einemmale durch das Produkte derselben  $pqn$ , beide Seiten multipliciren, so erhält man

$$\frac{pqnfgx}{pq} - \frac{pqnx}{n} = \frac{pqnbx}{x}$$

$$\text{oder } nfgx - pqx = pqnb.$$

## 86. Drittes Kap. Von der algebr. 1c.

### §. 135. XXXV. Aufgabe.

Wenn ich zwei Brüche von gleichen Zählern,  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{3}{5}$ , nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst, unter einerlei Benennung bringe und addire; so erhalte ich den neuen Bruch  $\frac{7}{5}$ , als die Summe der beiden Brüche. Nun sehe ich, daß dieser Bruch  $\frac{7}{5}$  sogleich herauskommt, wenn ich die Summe der beiden Nenner ( $5 + 5$ ) durch den gemeinschaftlichen Zähler 2 multiplicire, und unter dieses Product das Product der beiden Nenner als Divisor schreibe: wird mir ein solches Verfahren allemal die Summe zweier Brüche von gleichen Zählern geben?

### §. 136. Auflösung.

Man drücke zwei Brüche von gleichen Zählern allgemein aus durch  $\frac{p}{a}$  und  $\frac{q}{a}$ , und bringe nach

den Regeln der gemeinen Rechenkunst beide unter einerlei Nenner, indem man Zähler und Nenner eines jeden Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt, so erhält man  $\frac{ap}{aq}$  und  $\frac{aq}{aq}$ ; beide addirt,

$$\text{gibt } \frac{ap}{aq} + \frac{aq}{aq} = \frac{ap + aq}{aq} = \frac{a(p + q)}{aq}, (\S. 21.)$$

und aus dieser Gleichung erhellet, daß das angegebene Verfahren allemal die richtige Summe solcher Brüche geben wird. Eben so kan nach folgenden Gleichungen  $\frac{ap}{aq} - \frac{aq}{aq} = \frac{ap - aq}{aq} = \frac{a(p - q)}{aq}$  die

Differenz  $\frac{p}{a} - \frac{q}{a}$  auf eine ähnliche Weise mit Vortheil berechnet werden.

Viertes



## Viertes Kapitel.

### Von den Decimalbrüchen.

§. 137.

Nach dem bekanten Gesetze unserer allgemein eingeführten Decimalzahlen bedeutet z. B. in 333 die äußerste 3 an der linken Seite 10 mal mehr, als die um eine Decimalstelle weiter nach der Rechten zu stehende 3, und diese mittlere 3 wieder 10 mal mehr als die zunächst zur Rechten geschriebene 3, so daß diese Zahl gelesen wird dreihundert, dreißig und drei. Wenn man nun annimmt, daß das Komma in 333,3333 ein für allemal die Stelle der Einer anzeigt, übrigens aber nach dem vorigen Gesetze jede Ziffer, welche um eine Stelle weiter zur Rechten hin steht, 10 mal weniger als die nach der linken ihr zunächst stehende bedeuten solle; so wird die Zahl 333,3333 zu lesen sein: dreihundert, dreißig und drei; 3 Zehntel, 3 Hundertel, 3 Tausendtel und 3 Zehntausendtel. Und folgende Zahl, 24,523, wird so viel sein als  $20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ .

§. 138.

Bei einer Zahl, welche ganz ohne ein solches Einheitskomma geschrieben ist, wird allemal angenommen, daß die äußerste Zahl der rechten Seite

§ 4

an

an der Stelle der Einer stehe, so daß 856 so viel ist, als 856, und 120 so viel ist, als 120,

## §. 139.

240 ist zehnmal mehr als 24, weil durch die zu 24 geschriebne 0 in 240, die 4 von der Stelle der Einer in die Stelle der Zehner, und die 2 von ihrer Stelle der Zehner in die Stelle der Hunderte verrückt wird. Es ist aber 24,0 oder auch 24,000 nichts mehr, als 24, weil so wenig durch angeschriebne Nullen, als durch andere hinzugeschriebne Zahlen, die durch das (,) nunmehr bestimmte Stelle der Einer weiter verrückt werden kan.

## §. 140.

Da nun  $524,3 = 500 + 20 + 4 + \frac{3}{10}$ ,  
aber  $52,43 = 50 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$  ist; so sieht man deutlich ein, daß ein jedes Theil der Zahl 524,3 also auch die ganze Zahl selbst um 10 mal kleiner dadurch wird, daß man das Einheitskomma um eine Decimalstelle weiter nach der linken zu rückt. Und da auf eben die Art

$$806,2 = 800 + 0 + 6 + \frac{2}{10}$$

$$\text{aber } 80,62 = 80 + 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100}$$

$$\text{und } 8,062 = 8 + 0 + \frac{6}{100} + \frac{2}{1000}$$

$$\text{und } 0,8062 = \frac{8}{1000} + 0 + \frac{6}{10000} + \frac{2}{100000} \text{ ist;}$$

so leuchtet überhaupt gar leicht ein, daß eine jede Zahl um zehnmal, hundertmal oder 1000 mal 10. kleiner wird, indem man das Einheitskomma um ein

## Von den Decimalbrüchen. 89

ein, zwei oder drei *z.* Decimalstellen weiter nach der Linken zu hinaufrückt.

### §. 141.

Umgekehrt mus also auch eine jede Decimalzahl um 10, 100, 1000 mal *z.* größer werden, wenn man das Einheitskomma um eine, zwei, drei *z.* Decimalstellen nach der Rechten zu fortrückt. Es mus *z.* B. 3460, tausendmal größer sein, als 3,460 welches auch durch sich selbst schon klar ist, indem  $3,460 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + 0$ ,  
aber  $3460 = 3000 + 400 + 60 + 0$  ist.

### §. 142.

Nach dieser Einrichtung können nicht nur mehrere Decimalbrüche von verschiednen Nennern auf eine ungemein bequeme Weise geschrieben werden, indem man *z.* B. stat  $30 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$  schreibt 30,465 stat  $\frac{1}{100} + \frac{5}{10000}$  schreibt 0,0506; sondern es können auch alle Regeln für die Addition, Subtraktion und Division in ganzen Decimalzahlen auf diese Decimalbrüche angewandt werden.

### §. 143.

So wird *z.* B. von  $8,04374$   
und  $23,9825$   
die Summe sein  $32,02624$   
                  (1) (1) (1)

§ 5

Denn

denn da  $10700 + 10500 = 12200 = 10000 + 10200 = 10000 + 10000 + 2000$  ist; so mus von der Zahl 12 welche aus der Addition der beiden übereinanderstehenden Zahlen 7 und 5 entsteht, die Zahl 1 mit zur nächst höhern Decimalstelle hinzugerechnet werden 2c. Eben so wird auch

von 800, 98  
6, 0407  
0, 09

die Summe sein 807, 1107.  
(2)

## §. 144.

Auf eben die Art wird auch

von 9, 8.0.2.0.1  
subtrahirt 0, 06 3 4 5

der Rest 9, 7 3 8 5 6 bleiben, und zu diesem der Subtrahent 0, 06 3 4 5 wiederum addirt, den Subtrahendus 9, 8 0 2 0 1 richtig geben.

## §. 145.

Der Faktor 4793 multiplicirt in  
den Faktor 284

19172

38344

9586

gibt das

Produkt 1361212.

Wenn

## Von den Decimalbrüchen. 91

Wenn nun stat des ersten Faktors ein 10 mal kleinerer Faktor, also 479,3 gesetzt würde; so müste auch das Produkt nothwendig 10 mal kleiner werden, folglich

$$\begin{array}{r} 479,3 \text{ multiplicirt} \\ \text{durch} \quad 284 \text{ geben das} \end{array}$$

Produkt 136121,2

Wenn stat des ersten Faktors ein 100 mal kleinerer also 47,93 oder ein 1000 mal kleinerer 4,793 gesetzt würde; so müste auch das Produkt 100 mal oder 1000 mal kleiner werden, folglich

$$\begin{array}{r} 47,93 \\ \text{284} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{und 4,793} \\ \text{284} \end{array}$$

geben 13612,12

geben 1361,212

Eben dasselbe gilt auch von dem andern Faktor. Sobald nämlich auch stat dieses Faktors 284 ein zehnmal kleinerer als 28,4 oder ein 100 mal kleinerer als 2,84 u. s. w. gesetzt wird; so mus auch dadurch aufs neue das Produkt 10 mal oder 100 mal u. s. w. verkleinert werden. Demnach wird das Produkt

$$\begin{array}{r} \text{von 47,93} \\ \text{mal 28,4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{von 4,793} \\ \text{mal 2,84} \end{array}$$

nicht mehr 13612,12  
sondern nur 1361,212

nicht mehr 1361,212  
sondern nur 13,61212 sein.

§. 146.

Aus diesem allen ergiebt sich für die Multiplikation in Decimalbrüchen folgende allgemeine Regel.  
Man

Man multiplicire zwei Decimalbrüche vollkommen so als ganze Zahlen in einander und schneide in dem so erhaltenen Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beiden Factoren zusammen genommen abgeschnitten sind: so hat man das Produkt dieser beiden Zahlen.

Eben so leichte werden die Regeln für die Division in Decimalbrüchen entwickelt. Denn da z. B. nach den bekanten Divisionsregeln gefunden wird  $\underline{14592} = 32$  und ein 10, 100 mal 1000 mal 10.

$\underline{456}$

kleinerer Dividendus ganz nothwendig auch einen 10 mal, 100 mal, 1000 mal 10. kleinern Quotienten geben mus; so wird sein  $\underline{1459, 2} = 3, 2$  und  $\underline{145, 92}$

$\underline{456}$

$\underline{456}$

$= 0,32$  und  $\underline{14,592} = 0,032$ . Und da im Gegen-

$\underline{456}$

theil ein 10, 100, 1000 mal 10. verkleinerter Divisor einen 10, 100, 1000 mal 10. vergrößerten Quotienten geben mus; so wird  $\underline{14592} = 320,$

$\underline{45,6}$

$\underline{14592} = 3200$ ,  $\underline{14,592} = 0,32$  sein, und es er-

$\underline{456}$

$\underline{45,6}$

hellert hieraus, daß man überhaupt den Quotienten zweier Decimalbrüche findet, indem man gerade wie bei ganzen Zahlen dividirt, ohne auf das Komma zu sehen, darauf aber den so gefundenen Quotienten so viele zehnmal kleiner macht, als Decimalstellen im Dividendus abgeschnitten sind, und

## Von den Decimalbrüchen. 93

und wieder so viele 10 mal größer macht, als Decimalstellen im Divisor abgeschnitten sind.

§. 148.

### XXXVI. Aufgabe.

Einen jeden Bruch in Decimalbrüche zu verwandeln.

§. 149.

### Auflösung.

Es sei z. B. der Werth des Bruchs  $\frac{3}{8}$  in Decimalbrüchen anzugeben; so sage ich, es ist  $\frac{3}{8} = \frac{3,000}{8}$  (§. 139.) durch wirklich vorgenommene Division finde ich nun (§. 147.)  $\frac{3,000}{8} = 0,375$  also mus  $\frac{3}{8} = 0,375$  sein. Eben so finde ich  $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$  und  $\frac{4}{5} = \frac{4,0}{5} = 0,8$  und überhaupt kan auf diese Weise der Werth eines Bruches genau in Decimalbrüchen ausgedrückt werden, wenn nur der Nenner desselben in seinem durch 10, oder 100, oder 1000, u. s. w. vermehrtem Zähler genau aufgehet. Ein solcher Bruch aber, bei welchem dieses nicht stat findet, kan niemals ganz genau in Decimalbrüchen angegeben werden. So kan ich z. B. zwar setzen  $\frac{2}{7} = \frac{2,00}{7}$  und durch wirklich vorgenommene Division finden  $\frac{2,00}{7} = 0,28$  u. es wird aber bei dieser Division noch ein Rest von 0,04, das ist,  $\frac{4}{100}$  bleiben, dessen siebenter Theil den noch fehlenden

## 86. Drittes Kap. Von der algebr. 1c.

### §. 135. XXXV. Aufgabe.

Wenn ich zwei Brüche von gleichen Zählern,  $\frac{2}{5}$  und  $\frac{3}{5}$ , nach den Regeln der gemeinen Rechenkunst, unter einerlei Benennung bringe und addire; so erhalte ich den neuen Bruch  $\frac{5}{5}$ , als die Summe der beiden Brüche. Nun sehe ich, daß dieser Bruch  $\frac{5}{5}$  sogleich herauskommt, wenn ich die Summe der beiden Nenner ( $5 + 3$ ) durch den gemeinschaftlichen Zähler 2 multiplicire, und unter dieses Produkt das Produkt der beiden Nenner als Divisor schreibe: wird mir ein solches Verfahren allemal die Summe zweier Brüche von gleichen Zählern geben?

### §. 136. Auflösung.

Man drücke zwei Brüche von gleichen Zählern allgemein aus durch  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{a}{a}$ , und bringe nach

den Regeln der gemeinen Rechenkunst beide unter einerlei Nenner, indem man Zähler und Nenner eines jeden Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt, so erhält man  $\frac{ap}{pq}$  und  $\frac{aq}{pq}$ ; beide addirt,

gibt  $\frac{ap}{pq} + \frac{aq}{pq} = \frac{ap + aq}{pq} = \frac{a(p + q)}{pq}$ , (§. 21.)

und aus dieser Gleichung erhellet, daß das angegebene Verfahren allemal die richtige Summe solcher Brüche geben wird. Eben so kan nach folgenden Gleichungen  $\frac{a}{p} - \frac{a}{q} = \frac{aq}{pq} - \frac{ap}{pq} = \frac{a(q - p)}{pq}$  die

Differenz  $\frac{a}{p} - \frac{a}{q}$  auf eine ähnliche Weise mit Vortheil berechnet werden.

Viertes



## Viertes Kapitel.

### Von den Decimalbrüchen.

§. 137.

Nach dem bekanten Gesetze unserer allgemein eingeführten Decimalzahlen bedeutet z. B. in 333 die äußerste 3 an der linken Seite 10 mal mehr, als die um eine Decimalstelle weiter nach der Rechten zu stehende 3, und diese mittlere 3 wieder 10 mal mehr als die zunächst zur Rechten geschriebene 3, so daß diese Zahl gelesen wird dreihundert, dreißig und drei. Wenn man nun annimmt, daß das Komma in 333,3333 ein für allemal die Stelle der Einer anzeigt, übrigens aber nach dem vorigen Gesetze jede Ziffer, welche um eine Stelle weiter zur Rechten hin steht, 10 mal weniger als die nach der Linken ihr zunächst stehende bedeuten solle; so wird die Zahl 333,3333 zu lesen sein: dreihundert, dreißig und drei; 3 Zehntel, 3 Hundertel, 3 Tausendtel und 3 Zehntausendtel. Und folgende Zahl, 24,523, wird so viel sein als  $20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ .

§. 138.

Bei einer Zahl, welche ganz ohne ein solches Einheitskomma geschrieben ist, wird allemal angenommen, daß die äußerste Zahl der rechten Seite

§ 4

an

an der Stelle der Einer stehe, so daß 856 so viel ist, als 856, und 120 so viel ist, als 120,

## §. 139.

240 ist zehnmal mehr als 24, weil durch die zu 24 geschriebne 0 in 240, die 4 von der Stelle der Einer in die Stelle der Zehner, und die 2 von ihrer Stelle der Zehner in die Stelle der Hunderte verrückt wird. Es ist aber 24,0 oder auch 24,000 nichts mehr, als 24, weil so wenig durch angeschriebne Nullen, als durch andere hinzugeschriebne Zahlen, die durch das (,) nunmehr bestimmte Stelle der Einer weiter verrückt werden kan.

## §. 140.

Da nun  $524,3 = 500 + 20 + 4 + \frac{3}{10}$ ,  
aber  $52,43 = 50 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$  ist; so sieht man deutlich ein, daß ein jedes Theil der Zahl 524,3 also auch die ganze Zahl selbst um 10 mal kleiner dadurch wird, daß man das Einheitskomma um eine Decimalstelle weiter nach der Linken zu rückt. Und da auf eben die Art

$806,2 = 800 + 0 + 6 + \frac{2}{10}$   
aber  $80,62 = 80 + 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100}$   
und  $8,062 = 8 + 0 + \frac{6}{100} + \frac{2}{1000}$   
und  $0,8062 = \frac{8}{1000} + 0 + \frac{6}{10000} + \frac{2}{100000}$  ist;  
so leuchtet überhaupt gar leicht ein, daß eine jede Zahl um zehnmal, hundertmal oder 1000 mal kleiner wird, indem man das Einheitskomma um ein

## Von den Decimalbrüchen. 89

ein, zwei oder drei *z.* Decimalstellen weiter nach der Linken zu hinausrückt.

### §. 141.

Umgekehrt mus also auch eine jede Decimalzahl um 10, 100, 1000 mal *z.* größer werden, wenn man das Einheitskomma um eine, zwei, drei *z.* Decimalstellen nach der Rechten zu fortrückt. Es mus *z.* B. 3460, tausendmal größer sein, als 3,460 welches auch durch sich selbst schon klar ist, indem  $3,460 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + 0$ ,  
aber  $3460 = 3000 + 400 + 60 + 0$  ist.

### §. 142.

Nach dieser Einrichtung können nicht nur mehrere Decimalbrüche von verschiednen Nennern auf eine ungemein bequeme Weise geschrieben werden, indem man *z.* B. stat  $30 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$  schreibt 30,465 stat  $\frac{5}{1000} + \frac{465}{1000}$  schreibt 0,0506; sondern es können auch alle Regeln für die Addition, Subtraktion und Division in ganzen Decimalzahlen auf diese Decimalbrüche angewandt werden.

### §. 143.

So wird *z.* B. von 8,04374

und 23,9825

die Summe sein 32,02624

(1) (1) (1)

§ 5

denn

denn da  $10\overline{700} + 10\overline{400} = 10\overline{200} = 10\overline{000} + 10\overline{200} = 10\overline{000} + 10\overline{200}$  ist; so mus von der Zahl 12 welche aus der Addition der beiden übereinanderstehenden Zahlen 7 und 5 entsteht, die Zahl 1 mit zur nächst höhern Decimalstelle hinzugerechnet werden 2c. Eben so wird auch

von 800, 98  
6, 0407  
0, 09

---

die Summe sein 807, 1107.  
(2)

## §. 144.

Auf eben die Art wird auch

von 9, 8.0.2.0.1  
subtrahirt 0, 06 3 4 5

---

der Rest 9, 7 3 8 5 6 bleiben, und zu diesem der Subtrahent 0, 06 3 4 5 wiederum addirt, den Subtrahendus 9, 8 0 2 0 1 richtig geben.

## §. 145.

Der Faktor 4793 multiplicirt in  
den Faktor 284

---

19172

38344

9586 giebt das

---

Produkt 1361212.

Wenn

## Von den Decimalbrüchen. 91.

Wenn nun stat des ersten Faktors ein 10 mal kleinerer Faktor, also 47, 3 gesetzt würde; so müste auch das Produkt nothwendig 10 mal kleiner werden, folglich

479,3 multiplicirt  
durch 284 geben das

Produkt 136121,2

Wenn stat des ersten Faktors ein 100 mal kleinerer also 4, 73 oder ein 1000 mal kleinerer 4, 793 gesetzt würde; so müste auch das Produkt 100 mal oder 1000 mal kleiner werden, folglich

47, 93  
2 84

und 4, 793  
284

geben 13612, 12

geben 1361, 212

Eben dasselbe gilt auch von dem andern Faktor. Sobald nämlich auch stat dieses Faktors 284 ein zehnmal kleinerer als 28, 4 oder ein 100 mal kleinerer als 2, 84 u. s. w. gesetzt wird; so mus auch dadurch aufs neue das Produkt 10 mal oder 100 mal u. s. w. verkleinert werden. Demnach wird das Produkt

von 47, 93  
mal 2 8,4

von 4, 793  
mal 2,84

nicht mehr 13612, 12  
sondern nur 1361, 212

nicht mehr 1361, 212  
sondern nur 13,61212 sein.

§. 146.

Aus diesem allen ergiebt sich für die Multiplikation in Decimalbrüchen folgende allgemeine Regel.  
Man

Man multiplicire zwei Decimalbrüche vollkommen so als ganze Zahlen in einander und schneide in dem so erhaltenen Produkte so viele Decimalstellen ab, als in beiden Factoren zusammen genommen abgeschnitten sind: so hat man das Produkt dieser beiden Zahlen.

Eben so leicht werden die Regeln für die Division in Decimalbrüchen entwickelt. Denn da z. B. nach den bekanten Divisionsregeln gefunden wird  $14592 = 32$  und ein 10, 100 mal 1000 mal 10.

456

kleinerer Dividendus ganz nothwendig auch einen 10 mal, 100 mal, 1000 mal 10. kleinern Quotienten geben mus; so wird sein  $1459, 2 = 3, 2$  und  $145, 92$

456

456

$= 0,32$  und  $14,592 = 0,032$ . Und da im Gegen-

456

theil ein 10, 100, 1000 mal 10. verkleinerter Divisor einen 10, 100, 1000 mal 10. vergrößerten Quotienten geben mus; so wird  $14592 = 320,$

45,6

$14592 = 3200,$   $14,592 = 0,32$  sein, und es er-

456

45,6

hellert hieraus, daß man überhaupt den Quotienten zweier Decimalbrüche findet, indem man gerade wie bei ganzen Zahlen dividirt, ohne auf das Komma zu sehen, darauf aber den so gefundenen Quotienten so viele zehnmal kleiner macht, als Decimalstellen im Dividendus abgeschnitten sind, und

## Von den Decimalbrüchen. 93

und wieder so viele 10 mal größer macht, als Decimalstellen im Divisor abgeschnitten sind.

§. 148.

### XXXVI. Aufgabe.

Einen jeden Bruch in Decimalbrüche zu verwandeln.

§. 149.

#### Auflösung.

Es sei z. B. der Werth des Bruchs  $\frac{3}{8}$  in Decimalbrüchen anzugeben; so sage ich, es ist  $\frac{3}{8} = \frac{3,000}{8}$  (§. 139.) durch wirklich vorgenommene Division finde ich nun (§. 147.)  $\frac{3,000}{8} = 0,375$  also mus  $\frac{3}{8} = 0,375$  sein. Eben so finde ich  $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5$  und  $\frac{4}{5} = \frac{4,0}{5} = 0,8$  und überhaupt kan auf diese Weise der Werth eines Bruches genau in Decimalbrüchen ausgedrückt werden, wenn nur der Nenner desselben in seinem durch 10, oder 100, oder 1000, u. s. w. vermehrtem Zähler genau aufgehet. Ein solcher Bruch aber, bei welchem dieses nicht stat findet, kan niemals ganz genau in Decimalbrüchen angegeben werden. So kan ich z. B. zwar setzen  $\frac{2}{7} = \frac{2,00}{7}$  und durch wirklich vorgenommene Division finden  $\frac{2,00}{7} = 0,28$  u. es wird aber bei dieser Division noch ein Rest von 0,04, das ist,  $\frac{1}{25}$  bleiben, dessen siebenter Theil den noch fehlenden





rede angeführten Zwecke in dem zweiten Anhange nur ganz kurz unter Nummer 1 bis 36 angeführt sind. Nach diesen Nummern werden nämlich einige in der Folge nöthigen Sätze der Geometrie citirt werden, wobei wir voraussetzen, daß sich diejenigen, welche auch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie aus diesem Buche erlernen wollen, auch mit den Gründen und nächsten Folgerungen dieser Sätze nach irgend einem geometrischen Lehrbuche hinlänglich bekannt gemacht haben.

---

## Fünftes Kapitel.

### Anwendung der algebraischen Rechnungsart auf leichte geometrische Aufgaben.

---

§. 150.

#### XXXVII. Aufgabe.

Es ist ein Parallelogram (Fig. 5.) gegeben, dessen Grundlinie 8" und dessen Höhe 6" ist. Man sol ein anderes Parallelogram (Fig. 6.) machen, welches dem Flächenraum nach diesem gegebenen gleich sein, aber eine Grundlinie von 10" haben sol: wie hoch mus das Parallelogram gemacht werden?

§. 151.

## 96 Fünftes Kapitel. Anwendung

§. 151.

Auflösung.

Die gesuchte Höhe sei  $x''$ ; so wird der Inhalt eines Parallelograms dessen Basis  $10''$  und dessen Höhe  $x''$  ist, durch  $10 \cdot x''$  angegeben (30) und es mus demnach  $x$  dergestalt genommen werden, daß  $10x = 6 \cdot 8$  wird, also  $x = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{48}{10} = (\S. 140.)$   
 $4,8'' = 4'' 8'''$  sein.

§. 152.

XXXVIII. Aufgabe.

Wie groß mus die Grundlinie eines Parallelogrammes genommen werden, zu dessen Höhe eine Linie  $H''$  gegeben ist, wenn es 4 mal so groß werden sol, als ein anderes gegebenes Parallelogram, dessen Basis  $= b$  und Höhe  $= h$  ist.

§. 153.

Auflösung.

Man zeichne sich außer dem gegebenen auch ein anderes Parallelogram, welches das gesuchte Parallelogram bis zur weitem Berichtung vorstellen kan, und nenne die noch unbefante Grundlinie desselben  $x''$ ; so wird  $Hx''$  den Inhalt des gesuchten, so wie  $hb$  den Inhalt des gegebenen Parallelogrammes angeben. Damit also den Forderungen der Aufgabe Genüge geschehe, mus  $x$   
 der.

## der algebraischen Rechnungsart. 97

dergestalt angenommen werden, daß  $H \times \square' = 4 h b \square''$ , also (siehe Anmerk. § 78.) überhaupt  $H x = 4 h b$  wird, folglich  $x = \frac{4 h b}{H}$  sein.

Wenn also gegeben wäre  $h = 6''$ ,  $b = 5''$ ,  $H = 4''$ , so müste gemacht werden  $x = \frac{4 \cdot 6'' \cdot 5''}{4''}$   
 $= \frac{4 \cdot 60''' \cdot 50'''}{4''} = 3000''' = 30.$

§. 154.

### XXXIX. Aufgabe.

Es sol ein Parallelogram von einer bestimmten Basis  $\beta$  gemacht werden, dessen Flächenraum 3 mal so groß ist, als ein gegebner Triangel, dessen Basis  $= b$  und dessen Höhe  $= h$ . Wie hoch mus das Parallelogram gemacht werden?

§. 155.

### Auflösung.

Die gesuchte Höhe des Parallelograms sei  $= x$ ; so ist der Inhalt eines Parallelogrammes, dessen Höhe  $x$  und Basis  $\beta$  ist  $= \beta x$ , und der Inhalt des gegebenen Triangels ist  $= \frac{b h}{2}$ ; folglich mus

nach den Forderungen der Aufgabe  $x$  dergestalt angenommen werden, daß  $\beta x = \frac{3 b h}{2}$  wird, wel-

⑤

ches

## 98 Fünftes Kapitel: Anwendung 1

ches geschieht, wenn  $x = \frac{g b h}{2 \beta}$  genommen wird.

Nach dieser Formel läßt sich nun das erforderliche Maß der gesuchten Grundlinie in Zahlen finden, indem man die gegebenen Linien  $g, b, h, \beta$  misst und ihre Größe durch Zahlen ausdrückt, welche sich auf einerlei Einheit beziehen, das ist, es muß das Maß aller Linien entweder in Schuhen oder Zollen oder Linien etc. angegeben werden.

§. 156

### XI. Aufgabe.

Es ist auf dem Felde ein Quadrat von  $144 \square^o$  abgestochen worden; wie groß muß die eine Seite genommen werden?

Antwort:  $12^o$ ; denn ein Quadrat, dessen eine Seite  $= 12^o$  ist, enthält  $12 \cdot 12$ , das ist  $144 \square^o$ .

§. 157.

### XLI. Aufgabe.

Ein solches Quadrat auf dem Felde soll  $409600 \square^o$  enthalten; wie groß muß die eine Seite des Quadrats genommen werden?

§. 158.

### Auflösung.

Es kommt nur darauf an, daß man eine Zahl findet, welche mit sich selbst multiplicirt  $409600$  gibt.

Diese

## der algebraischen Rechnungsart 1c. 99

Diese Zahl heißt alsdan die Quadratwurzel von 409600, so wie 5 die Quadratwurzel von  $25 = 5 \cdot 5$ , 6 die Quadratwurzel von  $36 = 6 \cdot 6$ , 7 die Quadratwurzel von 49, und umgekehrt 25 die Quadratzahl von 5, 49 die Quadratzahl von 7 genant wird.

Man bemühe sich für jetzt nur, diese Zahl durch Versuche zu finden, wobei man sogleich übersehen kan, daß die Wurzel von 4096 zwischen 10 und 100 fallen mus; denn das Quadrat von 10, nämlich  $10 \cdot 10 = 100$  würde kleiner, das Quadrat von 100 aber, nämlich 10000, größer als 4096 sein. Das Quadrat von 50 ist  $50 \cdot 50 = 2500$ , welches also noch zu klein ist; 60 quadrit gibt  $60 \cdot 60 = 3600$ , Das Quadrat von 64 aber gibt  $64 \cdot 64 = 4096$ ; also ist 64 die Quadratwurzel von 4096, und es mus 640 die verlangte Quadratwurzel von 409600 sein.

§. 159.

Der Ausdeut  $\sqrt{4}$  zeigt die Quadratwurzel von 4 an. Es ist also  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{25} = 5$ ,  $\sqrt{100} = 10$ ,  $\sqrt{144} = 12$ ,  $\sqrt{(12+4)} = \sqrt{16} = 4$ ,  $\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8$ . Bei dem Gebrauche dieses Wurzelzeichens ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) wird sich überhaupt wenig Schwierigkeit finden, wenn wir nur immer auf den Begriff zurück sehen, daß  $\sqrt{a}$  eine Zahl bedeutet, welche mit sich selbst multiplicirt a gibt; oder daß  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = 25$ ; daß eben so  $\sqrt{81} \cdot \sqrt{81} = 81$ , und überhaupt  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{(a+b)} = a + b$  ist.

§ 2

§. 160.

## 100. Fünftes Kapitel. Anwendung.

§. 160.

Die Quadratzahl von  $x$  ist  $x^2$ . Setzt  $x$  schreibt man  $x^2$ , und spricht den Ausdruck  $x^2$  aus durch  $x$  quadriert, oder  $x$  in der zweiten Potenz. Eben so ist  $a^2 = a \cdot a$ ,  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ , folglich ist  $\sqrt{a^2} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$  und dergleichen.

§. 161.

Grundsatz.

Wenn zwei Zahlen einander gleich sind, so müssen auch ihre Quadratzahlen einander gleich sein. z. B. wenn  $a = n+r$ , so muss auch  $a \cdot a = (n+r) \cdot (n+r)$  sein. Und umgekehrt müssen auch

§. 162.

Die Quadratwurzeln zweier gleichen Zahlen einander gleich sein; z. B.

Wenn  $x^2 = b$ , so muss auch

$\sqrt{x^2} = \sqrt{b}$  sein. Denn es ist nach (§. 159.)  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = x^2$ , und ferner auch  $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$ . Da nun  $x^2 = b$  sein soll; so muss auch  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$  sein, welches unmöglich stat finden könnte, wenn  $\sqrt{b}$  um das geringste größer oder kleiner als  $\sqrt{x^2}$  wäre.

§. 163.

XLII. Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, als ein gegebner Triangel von der Basis  $b$  und Höhe

## der algebraischen Rechnungsart ic. 101

Höhe  $h$ , und ein gegebenes Parallelogram von der Basis  $\beta$  und Höhe  $\alpha$  zusammengenommen.

§. 164.

Auflösung.

man | en Dreieck, dessen Basis  
rallelt | nennet; ferner ein Pa-  
=  $\alpha$  | rallelogramm, dessen Basis  
Quadr |  $= \beta$  und dessen Höhe  
des gesuchten Quadrats  $x$ , so sieht man leicht, daß  
nach den Forderungen der Aufgabe sein sol

$$x^2 = \alpha\beta + bh, \text{ folglich}$$

$$\text{also (§. 163.) } \sqrt{x^2} = \sqrt{\alpha\beta + bh}$$

$$\text{das ist } x = \sqrt{\alpha\beta + bh}$$

Es sei  $b = 4$ ,  $h = 3$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 6$ , so ist  
 $x = \sqrt{5 \cdot 6 + 4 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ .

§. 165.

XLIII. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, dessen Flächenraum  $n$ mal kleiner ist, als der Flächenraum eines gegebenen Quadrats.

§. 166.

Auflösung.

Außer dem gegebenen Quadrate zeichne man sich noch ein anderes ohngefähr  $n$ mal kleineres Quadrat,

Quadrat, welches bis zur weitem Berichtigung das gesuchte Quadrat vorstellen kan. Nenn man nun die Seite des gegebenen Quadrats  $a$ , so gibt die Zahl  $a^2$  den Flächenraum desselben, und eben so, wenn die gesuchte Seite des verlangten Quadrates  $x$  genant wird, die Zahl  $x^2$  den Flächenraum des gesuchten Quadrates an. Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$4x^2 = a^2, \text{ also}$$

$$\text{mus auch sein } x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{folglich (§. 162.) } x = \sqrt[4]{a^2}.$$

Es komt also nur darauf an, daß wir die Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt  $\frac{a^2}{4}$  gibt;

und dis ist ohne Zweifel  $\frac{a}{2}$ : denn es ist nach den

Regeln für die Multiplikation in Brüchen (§. 167.)

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

§. 167.

Da allemal die Quadratzahl einer jeden Zahl entsteht, indem die Zahl durch sich selbst multiplicirt wird; so mus  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ,  $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$  und überhaupt  $(\frac{n}{m})^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$  sein, folglich mus die Quadratzahl eines ächten Bruches,



Bruches, in welchem der Nenner größer ist, als der Zähler, allerdings kleiner, als die Quadratwurzel selbst sein, weil allemal das Produkt zweier ächten Brüche kleiner, als einer von den Faktoren ist. Es hat aber auch dieser Satz bei der Anwendung auf geometrische Flächenräume nicht die geringste Schwierigkeit. Man setze, daß Fig. 7. des Quadrats ABCD Seite AB = 1 Zol, folglich der Flächenraum des ganzen Quadrats =  $1\text{ } \square$  sei, und nehme nun FB =  $\frac{2}{3}$ , so wird das Quadrat FGHB allerdings =  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\text{ } \square$  enthalten.

CTI 2

## Sechstes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

§. 168.

XLIV. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, welche mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt ein Produkt giebt, welches einer andern gegebenen Zahl b gleich ist.

§ 4

§. 169.

# 104 Sechstes Kapitel: Lehrfätze

§. 169.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei  $x$ ; so ist  $a \cdot x = b$ , daher  $x = \frac{b}{a}$

Für  $a = 8$ ,  $b = 32$  ist  $x = \frac{32}{8} = 4$  und  $4 \cdot 8$  giebt 32.

Für  $a = 36$ ,  $b = 12$  ist  $x = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{3} \cdot 36$  giebt 12.

Für  $a = 20$ ,  $b = 8$  ist  $x = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$  und  $\frac{2}{5} \cdot 20$  giebt 8.

§. 170.

Wäre von den beiden gegebenen Zahlen, die eine z. B.  $a$  ein Bruch, so, daß  $a = \frac{p}{q}$ , so erhielte

die Formel  $x = \frac{b}{a}$  folgende Gestalt  $x = \frac{b \cdot q}{p}$ ; mul.

tiplicirt man nun den Zähler  $b$ , und den Nenner  $p$  durch  $q$ , wodurch der Werth des Bruchs

nicht verändert wird; so erhält man  $x = \frac{b \cdot q}{p} = \frac{b \cdot q}{p}$ .

§. 171.

# der geometrischen Proportionen. 105

§. 171.

Wäre auch  $\frac{r}{s}$  ein Bruch und  $\frac{r}{s} = \frac{r}{s}$ ; so würde  
sein  $x = \frac{r}{s}$ , oder, Zähler und Nenner multipli-

$$\frac{\frac{r}{s}}{\frac{p}{q}}$$

cirt durch  $q$ ,  $x = \frac{r q}{s} = \frac{r q}{s}$ , ferner noch Zähler

$$\frac{\frac{p q}{q}}{\frac{s}{p}}$$

und Nenner multiplicirt durch  $s$ ,  $x = \frac{r q s}{s} = \frac{r q}{p}$ .

$$\frac{\frac{s}{p s}}{p s}$$

§. 172.

Als ein Zeichen der vorzunehmenden Division pflegt man auch zwei Punkte (:) zu gebrauchen, dergestalt, daß  $a : b$  einerlei sagt mit  $\frac{a}{b}$ , welches

besonders alsdenn, wenn der Dividendus oder Divisor, oder beide schon die Gestalt eines Bruches haben, bequemer als der gewöhnliche Divisionsstrich gebraucht wird. Man schreibt daher

§.

§.

## Fünftes Kapitel. Anwendung 3

beschreibt, wenn  $x = \frac{g b h}{2 \beta}$  genommen wird.

Nach dieser Formel läßt sich nun das erforderliche der gesuchten Grundlinie in Zahlen finden, man die gegebenen Linien  $b$ ,  $h$ ,  $\beta$  misst und Größe durch Zahlen ausdrückt, welche sich auf eine Einheit beziehen, das ist, es muß das Alter Linien entweder in Schuhen oder Faden der Linien angegeben werden.

§. 156.

### XL. Aufgabe.

Es sei auf dem Felde ein Quadrat von  $144 \square$  gegeben worden; wie groß muß die eine Seite genommen werden?

Antwort:  $12^{\circ}$ ; denn ein Quadrat, dessen Seite  $= 12^{\circ}$  ist, enthält  $12 \cdot 12$ , das ist  $144 \square$ .

§. 157.

### XLI. Aufgabe.

Ein solches Quadrat auf dem Felde, sei  $409600 \square$  enthalten; wie groß muß die eine des Quadrats genommen werden?

§. 158.

### Auflösung.

Es kommt nur darauf an, daß man eine Zahl welche mit sich selbst multiplicirt  $409600$  gibt.  
Diese

## Der algebraischen Rechnungsart 2c. 99

Diese Zahl heißt alsdan die Quadratwurzel von 409600, so wie 5 die Quadratwurzel von  $25 = 5 \cdot 5$ , 6 die Quadratwurzel von  $36 = 6 \cdot 6$ , 7 die Quadratwurzel von 49, und umgekehrt 25 die Quadratzahl von 5, 49 die Quadratzahl von 7 genant wird.

Man bemühe sich für jetzt nur, diese Zahl durch Versuche zu finden, wobei man sogleich übersehen kan, daß die Wurzel von 4096 zwischen 10 und 100 fallen mus; denn das Quadrat von 10, nämlich  $10 \cdot 10 = 100$  würde kleiner, das Quadrat von 100 aber, nämlich 10000, größer als 4096 sein. Das Quadrat von 50 ist  $50 \cdot 50 = 2500$ , welches also noch zu klein ist; 60 quadrit gibt  $60 \cdot 60 = 3600$ ; Das Quadrat von 64 aber gibt  $64 \cdot 64 = 4096$ ; also ist 64 die Quadratwurzel von 4096, und es mus 640 die verlangte Quadratwurzel von 409600 sein.

§. 159.

Der Ausdruf  $\sqrt{4}$  zeigt die Quadratwurzel von 4 an. Es ist also  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{25} = 5$ ,  $\sqrt{100} = 10$ ,  $\sqrt{144} = 12$ ,  $\sqrt{(12+4)} = \sqrt{16} = 4$ ,  $\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8$ . Bei dem Gebrauche dieses Wurzelzeichens ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) wird sich überhaupt wenig Schwierigkeit finden, wenn wir nur immer auf den Begriff zurük sehen, daß  $\sqrt{a}$  eine Zahl bedeutet, welche mit sich selbst multiplicirt a gibt; oder daß  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = 25$ ; daß eben so  $\sqrt{81} \cdot \sqrt{81} = 81$ , und überhaupt  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{(a+b)} = a + b$  ist.

§. 2

§. 160.

## 100. Fünftes Kapitel. Anwendung:

§. 160.

Die Quadratzahl von  $x$  ist  $x^2$ . Statt  $x^2$  schreibt man  $x^2$ , und spricht den Ausdruck  $x^2$  aus durch  $x$  quadriert, oder  $x$  in der zweiten Potenz. Eben-so ist  $a^2 = a \cdot a$ ,  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ , folglich ist  $\sqrt{a^2} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$  und dergleichen.

§. 161.

Grundsatz.

Wenn zwei Zahlen einander gleich sind, so müssen auch ihre Quadratzahlen einander gleich sein. Z. B. wenn  $a = n+r$ , so mus auch  $a \cdot a = (n+r) \cdot (n+r)$  sein. Und umgekehrt müssen auch

§. 162.

Die Quadratwurzeln zweier gleichen Zahlen einander gleich sein; z. B.

Wenn  $x^2 = b$ , so mus auch

$\sqrt{x^2} = \sqrt{b}$  sein. Denn es ist nach (§. 159.)  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = x^2$ , und ferner auch  $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$ . Da nun  $x^2 = b$  sein sol; so mus auch  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$  sein, welches unmöglich stat finden könnte, wenn  $\sqrt{b}$  um das geringste größer oder kleiner als  $\sqrt{x^2}$  wäre.

§. 163.

XLII. Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, als ein gegebner Triangel von der Basis  $b$  und Höhe

Höhe  $h$ , und ein gegebenes Parallelogramm von der Basis  $\beta$  und Höhe  $\alpha$  zusammengenommen.

§. 164.

Auflösung.

Man zeichne sich einen Triangel, dessen Basis man  $b$  und dessen Höhe  $h$  nennet; ferner ein Parallelogramm, dessen Basis  $= \beta$  und dessen Höhe  $= \alpha$  ist, und ein Quadrat, welches das gesuchte Quadrat vorstellen sol. Nent man nun die Seite des gesuchten Quadrats  $x$ , so steht man leicht, daß nach den Forderungen der Aufgabe sein sol

$$x^2 = \alpha\beta + bh, \text{ folglich}$$

$$\text{auch (§. 163.) } \sqrt{x^2} = \sqrt{(\alpha\beta + bh)}$$

$$\text{das ist } x = \sqrt{(\alpha\beta + bh)}$$

Es sei  $b = 4$ ,  $h = 3$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 6$ , so ist

$$x = \sqrt{5 \cdot 6 + 4 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6.$$

§. 165.

XLIII. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, dessen Flächenraum  $n$ lernal kleiner ist, als der Flächenraum eines gegebenen Quadrats.

§. 166.

Auflösung.

Außer dem gegebenen Quadrate zeichne man sich noch ein anderes ohngefähr  $n$ lernal kleineres Quadrat,

## 102 Fünftes Kapitel. Anwendung.

Quadrat, welches bis zur weitem Berichtigung das gesuchte Quadrat vorstellen kan. Nenn man nun die Seite des gegebenen Quadrats  $a$ , so gibt die Zahl  $a^2$  den Flächenraum desselben, und eben so, wenn die gesuchte Seite des verlangten Quadrates  $x$  genant wird, die Zahl  $x^2$  den Flächenraum des gesuchten Quadrates an. Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$4x^2 = a^2, \text{ also}$$

$$\text{mus auch sein } x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{folglich (§. 162.) } x = \sqrt{\frac{a^2}{4}}.$$

Es komt also nur darauf an, daß wir die Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt  $\frac{a^2}{4}$  gibt;

und dis ist ohne Zweifel  $\frac{a}{2}$ : denn es ist nach den

Regeln für die Multiplikation in Brüchen (V)

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

§. 167.

Da allemal die Quadratzahl einer jeden Zahl entsteht, indem die Zahl durch sich selbst multiplicirt wird; so mus  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ,  $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$  und überhaupt  $(\frac{n}{m})^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$  sein, folglich mus die Quadratzahl eines achten Bruches, Bruches,



Bruches, in welchem der Nenner größer ist, als der Zähler, allerdings kleiner, als die Quadratwurzel selbst sein, weil allemal das Produkt zweier ächten Brüche kleiner, als einer von den Faktoren ist. Es hat aber auch dieser Satz bei der Anwendung auf geometrische Flächenräume nicht die geringste Schwierigkeit. Man setze, daß Fig. 7. des Quadrats ABCD Seite AB = 1 Zol, folglich der Flächenraum des ganzen Quadrats =  $1 \square$  sei, und nehme nun FB =  $\frac{2}{3}$ , so wird das Quadrat FGHB allerdings =  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \square$  enthalten.

## Sechstes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

§. 168.

XLIV. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, welche mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt ein Produkt giebt, welches einer andern gegebenen Zahl b gleich ist.

## 94 Viertes Kapitel.

lenden Theil des Quotienten ausmacht. Indessen sieht man hieraus, daß der Fehler kein ganzes Hundertel, sondern nur noch einige Tausendtel, Zehntausendtel, 2c. betragen kan. Indem ich nun entweder in diesen Rest 0,04 weiter fort dividire durch 7, oder auch gleich anfangs setze  $\frac{2}{7} = \underline{2,0000}$ , so finde ich  $\frac{2}{7} = 0,2857$  2c. so daß der Fehler, welcher hiebei immer noch begangen wird, nunmehr kein ganzes Zehntausendtel mehr betragen, sondern nur noch in den fehlenden Decimalbrüchen der folgenden immer niedrigeren Klassen liegen kan. Auf diese Weise kan man durch fortgesetzte Division den Fehler so klein machen und die Genauigkeit so weit treiben, als man nur immer wil. Ueberdem entdeckt sich mehrentheils gar bald ein gewisses Gesetz, nach welchem einige von den noch fehlenden Decimalstellen ohne mühsame Division sogleich hinzugeschrieben werden können. So findet sich z. B.  $\frac{2}{7} = \underline{2,00} = 0,66$ ,  $\frac{2,000000}{7} = 0,66666$  2c.

$\underline{6,000000}$  ferner  $\frac{6}{7} = \underline{6,00} = 0,85$  2c. und da von nun an im Rest  $\frac{6}{7}$  die Division wieder eben muß, mer derselbe Rest bleiben mus, so wird  $\underline{6,0000000000}$   
 $\underline{0,057142}$   
 $\underline{6,0000000000} = 0,8571428571$  2c.  
 gefunden werden.

Indes die Anfänger diese 4 ersten Kapitel durchgegangen sind, hat man sie zugleich auch in den ersten Lehrsätzen und Aufgaben der Elementargeometrie unterrichtet, welche nach dem in der Vorrede

rede angeführten Zwecke in dem zweiten Anhange nur ganz kurz unter Nummer 1 bis 36 angeführt sind. Nach diesen Nummern werden nämlich einige in der Folge nöthigen Sätze der Geometrie citirt werden, wobei wir voraussetzen, daß sich diejenigen, welche auch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie aus diesem Buche erlernen wollen, auch mit den Gründen und nächsten Folgerungen dieser Sätze nach irgend einem geometrischen Lehrbuche hinlänglich bekannt gemacht haben.

---

## Fünftes Kapitel.

### Anwendung der algebraischen Rechnungsart auf leichte geometrische Aufgaben.

---

§. 150.

#### XXXVII. Aufgabe.

Es ist ein Parallelogram (Fig. 5.) gegeben, dessen Grundlinie 8" und dessen Höhe 6" ist. Man sol ein anderes Parallelogram (Fig. 6.) machen, welches dem Flächenraum nach diesem gegebenen gleich sein, aber eine Grundlinie von 10" haben sol: wie hoch mus das Parallelogram gemacht werden?

§. 151.

## 96 Fünftes Kapitel. Anwendung

§. 151.

Auflösung.

Die gesuchte Höhe sei  $x''$ ; so wird der Inhalt eines Parallelograms dessen Basis  $10''$  und dessen Höhe  $x''$  ist, durch  $10 \cdot x''$  angegeben (30) und es mus demnach  $x$  dergestalt genommen werden, daß  $10x = 6 \cdot 8$  wird, also  $x = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4\frac{8}{10} = (\S. 140.)$   
 $4,8'' = 4'' 8'''$  sein.

§. 152.

### XXXVIII. Aufgabe.

Wie groß mus die Grundlinie eines Parallelogrammes genommen werden, zu dessen Höhe eine Linie  $H''$  gegeben ist, wenn es 4 mal so groß werden sol, als ein anderes gegebenes Parallelogram, dessen Basis  $= b$  und Höhe  $= h$  ist.

§. 153.

Auflösung.

Man zeichne sich außer dem gegebenen auch ein anderes Parallelogram, welches das gesuchte Parallelogram bis zur weitem Berichtigung vorstellen kan, und nenne die noch unbekannte Grundlinie desselben  $x''$ ; so wird  $Hx''$  den Inhalt des gesuchten, so wie  $hb$  den Inhalt des gegebenen Parallelogrammes angeben. Damit also den Forderungen der Aufgabe Genüge geschehe, mus  $x$   
der

## Der algebraischen Rechnungsart. 97

dergestalt angenommen werden, daß  $H x \square = 4 h b \square$ , also (siehe Anmerk. § 78.) überhaupt  $H x = 4 h b$  wird, folglich  $x = \frac{4 h b}{H}$  sein.

Wenn also gegeben wäre  $h = 6''$ ,  $b = 5''$ ,  $H = 4'''$ , so müßte gemacht werden  $x = \frac{4 \cdot 6'' \cdot 5''}{4'''}$   
 $= \frac{4 \cdot 60''' \cdot 50'''}{4'''} = 3000''' = 30.$

§. 154.

### XXXIX. Aufgabe.

Es sol ein Parallelogram von einer bestimmten Basis  $\beta$  gemacht werden, dessen Flächenraum 3 mal so groß ist, als ein gegebener Triangel, dessen Basis  $= b$  und dessen Höhe  $= h$ . Wie hoch mus das Parallelogram gemacht werden?

§. 155.

#### Auflösung.

Die gesuchte Höhe des Parallelograms sei  $= x$ ; so ist der Inhalt eines Parallelogrammes, dessen Höhe  $x$  und Basis  $\beta$  ist  $= \beta x$ , und der Inhalt des gegebenen Triangels ist  $= \frac{b h}{2}$ ; folglich mus

nach den Forderungen der Aufgabe  $x$  dergestalt angenommen werden, daß  $\beta x = \frac{3 b h}{2}$  wird, wel-

③

des

## 98 Fünftes Kapitel. Anwendung 3

ches geschieht, wenn  $x = \frac{g b h}{2\beta}$  genommen wird.

Nach dieser Formel läßt sich nun das erforderliche Maß der gesuchten Grundlinie in Zahlen finden, indem man die gegebenen Linien  $b$ ,  $h$ ,  $\beta$  mißt und ihre Größe durch Zahlen ausdrückt, welche sich auf einerlei Einheit beziehen, das ist, es mus das Maß aller Linien entweder in Schuhen oder Zollen oder Linien etc. angegeben werden.

§. 156.

### XI. Aufgabe.

Es sei auf dem Felde ein Quadrat von  $144 \square$  abgestochen worden; wie groß mus die eine Seite genommen werden?

Antwort:  $12^\circ$ ; denn ein Quadrat, dessen eine Seite  $= 12^\circ$  ist, enthält  $12 \cdot 12$ , das ist  $144 \square$ .

§. 157.

### XLI. Aufgabe.

Ein solches Quadrat auf dem Felde, sei  $409600 \square$  enthalten; wie groß mus die eine Seite des Quadrats genommen werden?

§. 158.

#### Auflösung.

Es komt nur barauf an, daß man eine Zahl findet, welche mit sich selbst multiplicirt  $409600$  gibt.  
Diese

## der algebraischen Rechnungsart 10. 99

Diese Zahl heißt alsdan die Quadratwurzel von 409600, so wie 5 die Quadratwurzel von  $25 = 5 \cdot 5$ , 6 die Quadratwurzel von  $36 = 6 \cdot 6$ , 7 die Quadratwurzel von 49, und umgekehrt 25 die Quadratzahl von 5, 49 die Quadratzahl von 7 genant wird.

Man bemühe sich für jetzt nur, diese Zahl durch Versuche zu finden, wobei man sogleich übersehen kan, daß die Wurzel von 4096 zwischen 10 und 100 fallen mus; denn das Quadrat von 10, nämlich  $10 \cdot 10 = 100$  würde kleiner, das Quadrat von 100 aber, nämlich 10000, größer als 4096 sein. Das Quadrat von 50 ist  $50 \cdot 50 = 2500$ , welches also noch zu klein ist; 60 quadrit gibt  $60 \cdot 60 = 3600$ , Das Quadrat von 64 aber gibt  $64 \cdot 64 = 4096$ ; also ist 64 die Quadratwurzel von 4096, und es mus 640 die verlangte Quadratwurzel von 409600 sein.

§. 159.

Der Ausdruf  $\sqrt{4}$  zeigt die Quadratwurzel von 4 an. Es ist also  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{25} = 5$ ,  $\sqrt{100} = 10$ ,  $\sqrt{144} = 12$ ,  $\sqrt{(12+4)} = \sqrt{16} = 4$ ,  $\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8$ . Bei dem Gebrauche dieses Wurzelzeichens ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) wird sich überhaupt wenig Schwierigkeit finden, wenn wir nur immer auf den Begriff zurük sehen, daß  $\sqrt{a}$  eine Zahl bedeutet, welche mit sich selbst multiplicirt  $a$  gibt; oder daß  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = 25$ ; daß eben so  $\sqrt{81} \cdot \sqrt{81} = 81$ , und überhaupt  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{(a+b)} = a + b$  ist.

§. 2

§. 160.

## 100. Fünftes Kapitel. Anwendung.

§. 160.

Die Quadratzahl von  $x$  ist  $x^2$ . Statt  $x^2$  schreibt man  $x^2$ , und spricht den Ausdruck  $x^2$  aus durch  $x$  quadriert, oder  $x$  in der zweiten Potenz. Eben so ist  $a^2 = a \cdot a$ ,  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ , folglich ist  $\sqrt{a^2} = a$ ,  $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$  und dergleichen.

§. 161.

Grundsatz.

Wenn zwei Zahlen einander gleich sind, so müssen auch ihre Quadratzahlen einander gleich sein. Z. B. wenn  $a = n+r$ , so mus auch  $a \cdot a = (n+r) \cdot (n+r)$  sein. Und umgekehrt müssen auch

§. 162.

Die Quadratwurzeln zweier gleichen Zahlen einander gleich sein; z. B.

Wenn  $x^2 = b$ , so mus auch  $\sqrt{x^2} = \sqrt{b}$  sein. Denn es ist nach (§. 149.)  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = x^2$ , und ferner auch  $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$ . Da nun  $x^2 = b$  sein sol; so mus auch  $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$  sein, welches unmöglich stat finden könnte, wenn  $\sqrt{b}$  um das geringste größer oder kleiner als  $\sqrt{x^2}$  wäre.

§. 163.

XLII. Aufgabe.

Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, als ein gegebner Triangel von der Basis  $b$  und Höhe



Gebe  $h$ , und ein gegebenes Parallelogramm von der Basis  $\beta$  und Höhe  $\alpha$  zusammengenommen.

64.

lung.

Man  
man  $b$  in  
parallelogra  
 $= \alpha$  ist,  
Quadrat

des gesuchten Quadrats  $x$ , so sieht man leicht, daß nach den Forderungen der Aufgabe sein sol

$$x^2 = \alpha\beta + bh, \text{ folglich}$$

$$\text{auch (§. 167.) } \sqrt{x^2} = \sqrt{(\alpha\beta + bh)}$$

$$\text{das ist } x = \sqrt{(\alpha\beta + bh)}$$

Es sei  $b = 4$ ,  $h = 3$ ,  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 6$ , so ist

$$x = \sqrt{5 \cdot 6 + 4 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6.$$

§. 165.

### XLIII. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, dessen Flächenraum  $n$ ermal kleiner ist, als der Flächenraum eines gegebenen Quadrats.

§. 166.

Auflösung.

Außer dem gegebenen Quadrate zeichne man sich noch ein anderes ohngefähr  $n$ ermal kleineres

3

Quadrat,

## 102 Fünftes Kapitel. Anwendung.

Quadrat, welches bis zur weitem Berichtigung das gesuchte Quadrat vorstellen kan. Nenn man nun die Seite des gegebenen Quadrats  $a$ , so gibt die Zahl  $a^2$  den Flächenraum desselben, und eben so, wenn die gesuchte Seite des verlangten Quadrates  $x$  genant wird, die Zahl  $x^2$  den Flächenraum des gesuchten Quadrates an. Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$4x^2 = a^2, \text{ also}$$

$$\text{mus auch sein } x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{folglich (§. 162.) } x = \sqrt{\frac{a^2}{4}}.$$

Es komt also nur darauf an, daß wir die Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt  $\frac{a^2}{4}$  gibt;

und dis ist ohne Zweifel  $\frac{a}{2}$ : denn es ist nach den

Regeln für die Multiplikation in Brüchen: (V)

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

§. 167.

Da allemal die Quadratzahl einer jeden Zahl entsteht, indem die Zahl durch sich selbst multiplicirt wird; so mus  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ,  $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$  und überhaupt  $(\frac{n}{m})^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$  sein, folglich mus die Quadratzahl eines jeden Bruches,

Bruches, in welchem der Nenner größer ist, als der Zähler, allerdings kleiner, als die Quadratwurzel selbst sein, weil allemal das Produkt zweier ächten Brüche kleiner, als einer von den Faktoren ist. Es hat aber auch dieser Satz bei der Anwendung auf geometrische Flächenräume nicht die geringste Schwierigkeit. Man setze, daß Fig. 7. des Quadrats ABCD Seite AB = 1 Sol, folglich der Flächenraum des ganzen Quadrats =  $1\text{ } \square$  sei, und nehme nun FB =  $\frac{2}{3}$ , so wird das Quadrat FGHB allerdings =  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\text{ } \square$  enthalten.

## Sechstes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

§. 168.

XLIV. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, welche mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt ein Produkt giebt, welches einer andern gegebenen Zahl b gleich ist.

§ 4

§. 169.

Quadrat, welches bis zur weitem Berichtigung das gesuchte Quadrat vorstellen kan. Nenn man nun die Seite des gegebenen Quadrats  $a$ , so gibt die Zahl  $a^2$  den Flächenraum desselben, und eben so, wenn die gesuchte Seite des verlangten Quadrates  $x$  genant wird, die Zahl  $x^2$  den Flächenraum des gesuchten Quadrates an. Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$4x^2 = a^2, \text{ also}$$

$$\text{mus auch sein } x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{folglich (§. 162.) } x = \sqrt{\frac{a^2}{4}}.$$

Es komt also nur darauf an, daß wir die Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt  $\frac{a^2}{4}$  gibt;

und dis ist ohne Zweifel  $\frac{a}{2}$ : denn es ist nach den

Regeln für die Multiplikation in Brüchen (§. 167.)

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

§. 167.

Da allemal die Quadratzahl einer jeden Zahl entsteht, indem die Zahl durch sich selbst multiplicirt wird; so mus  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ,  $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$  und überhaupt  $(\frac{n}{m})^2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n^2}{m^2}$  sein, folglich mus die Quadratzahl eines jeden Bruches,

Bruches, in welchem der Nenner größer ist, als der Zähler, allerdings kleiner, als die Quadratwurzel selbst sein, weil allemal das Produkt zweier achten Brüche kleiner, als einer von den Faktoren ist. Es hat aber auch dieser Satz bei der Anwendung auf geometrische Flächenräume nicht die geringste Schwierigkeit. Man setze, daß Fig. 7. des Quadrats ABCD Seite AB = 1 Zol, folglich der Flächenraum des ganzen Quadrats =  $1\text{ } \square''$  sei, und nehme nun FB =  $\frac{2}{3}''$ , so wird das Quadrat FGHB allerdings =  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\text{ } \square''$  enthalten.

## Sechstes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

§. 168.

XLIV. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, welche mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt ein Produkt giebt, welches einer andern gegebenen Zahl b gleich ist.

# 104 Sechstes Kapitel: Lehrsätze

§. 169.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei  $x$ ; so ist  $a \cdot x = b$ , daher  $x = \frac{b}{a}$ .

Für  $a = 8$ ,  $b = 32$  ist  $x = \frac{32}{8} = 4$  und  $4 \cdot 8$  giebt 32.

Für  $a = 36$ ,  $b = 12$  ist  $x = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{3} \cdot 36$  giebt 12.

Für  $a = 20$ ,  $b = 8$  ist  $x = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$  und  $\frac{2}{5} \cdot 20$  giebt 8.

§. 170.

Wäre von den beiden gegebenen Zahlen, die eine z. B.  $a$  ein Bruch, so, daß  $a = \frac{p}{q}$ , so erhielte

die Formel  $x = \frac{b}{a}$  folgende Gestalt  $x = \frac{b \cdot q}{p}$ ; mul.

tiplicirt man nun den Zähler  $b$ , und den Nenner  $p$  durch  $q$ , wodurch der Werth des Bruchs

nicht verändert wird; so erhält man  $x = \frac{b \cdot q}{p \cdot q} = \frac{b \cdot q}{p}$ .

§. 171.

# der geometrischen Proportionen. 103

§. 171.

Wäre auch  $\lambda$  ein Bruch und  $\lambda = \frac{r}{s}$ ; so würde  
sein  $x = \frac{r}{s}$ , oder, Zähler und Nenner multipli-

$$\frac{\frac{r}{s}}{\frac{p}{q}}$$

cirt durch  $q$ ,  $x = \frac{r q}{s} = \frac{r q}{s}$ , ferner noch Zähler

$$\frac{\frac{r q}{s}}{\frac{p q}{q}} = \frac{r q}{s p}$$

und Nenner multiplicirt durch  $s$ ,  $x = \frac{r q s}{s p} = \frac{r q}{p}$ .

$$\frac{r q}{p}$$

§. 172.

Als ein Zeichen der vorzunehmenden Division pflegt man auch zwei Punkte (:) zu gebrauchen, dergestalt, daß  $a : b$  einerlei sagt mit  $\frac{a}{b}$ ,

besonders alsdenn, wenn der Dividendus oder Divisor, oder beide schon die Gestalt eines Bruches haben, bequemer als der gewöhnliche Divisionsstrich gebraucht wird. Man schreibt daher

§. 172. für

## 106 Sechstes Kapitel. Lehrsätze.

stat  $\frac{r}{s}$  lieber  $r : p$ , und aus dem vorigen §. er-

$$\frac{\frac{r}{s}}{p} = \frac{r}{s \cdot p}$$

heller, daß  $\frac{r}{s} = \frac{r \cdot q}{s \cdot p}$  sei, welches auch schon bei

$$\frac{\frac{r}{s}}{p} = \frac{r}{s \cdot p}$$

der Division in Brüchen gelehrt wird (siehe vorläufiger Unterricht VL.)

§. 173.

Man sieht aus der Auflösung der vorigen Aufgabe, daß man zu jeden 2 gegebenen Zahlen allerdings eine dritte finden kan, welche mit der einen multiplicirt die andere Zahl giebt, obgleich der Werth dieser Zahl sehr oft nicht anders als in einem Bruche angegeben werden kan.

§. 174.

Erklärung.

Wenn von vier Linien, (Fig. 8.) die erste eben so in der zweiten enthalten ist, als die dritte in der vierten; so sind diese vier Linien in der Ordnung proportional.

§. 175.

Um zu untersuchen, ob die vier Linien AB, CD, EF, GH proportional sind, so versuche man die



## der geometrischen Proportionen. 107

die erste Linie AB in solche gleiche Theile zu theilen, daß eine gewisse Anzahl dieser Theile zusammen genommen genau die zweite Linie CD herausbringe. Hat man dieses erreicht; so theile man die dritte Linie EF in eben so viel gleiche Theile, als die AB getheilt worden; und wenn alsdan eben so viel solcher gleichnamigen Theile von EF auf die GH gehen, als von AB auf die CD gingen: so sind die vier Linien AB, CD, EF, GH in dieser Ordnung proportional.

So sieht man z. B. daß die vier Linien AB, CD, EF, GH (Fig. 8.) proportional sind, denn 5 Drittel von AB machen gerade CD, und 5 Drittel von EF gerade GH aus, und es ist  $\frac{5}{3} \cdot AB = CD$ ,

und  $\frac{5}{3} \cdot EF = GH$ .

### §. 176.

Es kan sehr oft treffen, daß die zweite Linie weder aus den Dritteln noch aus den Vierteln, Fünfteln, Sechsteln u. der ersten Linie genau zusammengesetzt werden kan. Wenn man aber diese Linie nur immer weiter und weiter in mehrere und also auch kleinere Theile zertheilt; so wird man doch gar bald solche Theile erhalten, aus welchen sich die zweite Linie ohne allen für unser Auge merkbaren Fehler zusammensetzen läßt.

### §. 177.

## 108 Sechstes Kapitel. Lehrsätze

### §. 177.

Eben so sind auch 4 Zahlen proportional, wenn die erste Zahl so oft in der zweiten enthalten ist, als die dritte in der 4ten. Z. B. die vier Zahlen 2, 6, 4, 12, sind in dieser Ordnung proportional: denn 2 ist in 6 enthalten dreimal, so wie auch 4 in 12 dreimal enthalten ist. Man schreibt dergleichen Proportionalzahlen auf folgende Weise

$$2 : 6 = 4 : 12$$

und pflegt einen solchen Ausdruck zu lesen: 2 (verhält sich) zu 6; wie (sich verhält) 4 zu 12, oder auch: das Verhältniß der 2 zur 6 ist gleich dem Verhältniß der 4 zur 12.

### §. 178.

Es wäre demnach  $2 : 8 = 3 : 12$ ; denn 2 viermal genommen giebt 8, und 3 viermal genommen giebt 12.

Auch ist  $8 : 2 = 12 : 3$ , denn 8 ein Viertelmal genommen giebt 2, und 12 ein Viertelmal genommen ist gleich 3.

So ist auch  $4 : 6 = 8 : 12$ ; denn es ist  $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$  (4 dreizehntelmal genommen giebt 6), und  $8 \cdot \frac{3}{2} = 12$ .

### §. 179.

Hieraus sieht man, daß überhaupt vier Zahlen  $a, b, c, d$  in einer Proportion stehen, oder daß  $a : b = c : d$ , wenn, nachdem  $\frac{m}{n}$  verge-

steht

# der geometrischen Proportionen. 109

statt genommen worden, daß  $\frac{ma}{n} = b$ , (welches

allemaal geschehen kan §. 179.) auch  $\frac{mc}{n} = d$  ist,

3. B. in  $4:10 = 8:20$  kan genommen werden  
 $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ , so ist  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  und  $\frac{5 \cdot 8}{2} = 20$ .

§. 180.

## Erster Lehrsatz.

Wenn  $a:b = c:d$ , so ist  $ad = bc$ , das ist,  
 wenn 4 Zahlen proportional sind; so ist das Pro-  
 dukt der beiden äußern Glieder gleich dem Produkte  
 der beiden innern Glieder.

§. 181.

## Beweis.

Man schreibe  $ad = bc$ , das ist, man frägt,  
 ob wohl  $ad = bc$ ? und daß man diese Frage aller-  
 dings bejahen müsse, erhellet aus folgenden Schlüs-  
 sen: Wenn  $a:b = c:d$ , so wird, nachdem man  
 $\frac{m}{n}$  dergestalt genommen hat, daß  $\frac{ma}{n} = b$  auch

sein  $\frac{mc}{n} = d$  (§. 179.) Schreibt man nun in

der Fragegleichung  $ad = bc$ ,  $\frac{ma}{n}$  stat  $b$  und  $\frac{mc}{n}$

stat  $d$ ; so erhält man  $\frac{amc}{n} = \frac{cma}{n}$ . Es ist aber

klar

## 116 Sechstes Kapitel. Fünftes

Nur, daß  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , also auch, indem wieder  
 $\frac{a}{b}$  mit  $\frac{n}{n}$  und  $\frac{c}{d}$  mit  $\frac{n}{n}$  geschrieben werden  
 kan, daß  $ad = bc$ .

§. 182.

Zweiter Lehrsatz.

In  $a : b = c : d$ , ist  $d = \frac{bc}{a}$ , d. i. die vierte  
 Proportionalzahl ist gleich dem Produkte der bei-  
 den inneren Glieder durchs erste dividirt.

§. 183.

Beweis.

Es ist (erster Lehrsatz)  $ad = bc$ , folglich auch  
 (§. 55.)  $\frac{ad}{a} = \frac{bc}{a}$  das ist  $d = \frac{bc}{a}$ .

§. 184.

Folgerung.

Hieraus erhellet, daß man zu jeden drei ge-  
 gebnen Zahlen eine vierte Proportionalzahl finden  
 kan, indem man, wie auch die 3 Zahlen immer  
 gegeben sein mögen, doch allemal die beiden letz-  
 tern in einander multipliciren und dies Produkt  
 durch die erste Zahl dividiren, oder diese Division  
 doch wenigstens durch die gewöhnliche Bezeichnung  
 anzei-

## der geometrischen Proportionen. 111

anzeigen kan, in welchem Falle der Werth des Quotienten durch einen Bruch angegeben wird.

§. 185.

Dritter Lehrsatz.

Wenn von vier Zahlen das Produkt der beiden äussern Zahlen gleich ist dem Produkte der beiden innern; so sind diese vier Zahlen in der Ordnung, worin sie geschrieben sind, proportional. Z. B.

Wenn von  $p, q, r, s$

ist  $p \cdot s = q \cdot r$

so ist  $p : q = r : s$

§. 186.

Beweis.

Zu den drei Zahlen,  $p, q, r$ , läßt sich eine vierte richtige Proportionalzahl finden, welche ist  $= q \cdot r$  (§. 184.) und es ist folgende Proportion richtig.

$p : q = r : q \cdot r$ . Es wird nun gefragt, ob

auch  $p : q = r : s$  richtig sei? Ganz gewis; denn wenn, wie als wahr, angenommen und vorausgesetzt ist,  $p \cdot s = q \cdot r$ , so ist auch  $s = q \cdot r$ , folglich

die letztere Proportion nach allen einzelnen Gliedern mit der erstern gewis richtigen völlig einerlei.

112

§. 187.

# 112 Sechstes Kapitel. Lehrsätze

§. 187.  
Vierter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$ ; so ist  
 auch 2)  $a : c = b : d$   
 auch 3)  $b : a = d : c$   
 auch 4)  $b : d = c : a$   
 auch 5)  $c : d = a : b$   
 auch 6)  $c : a = d : b$   
 auch 7)  $d : c = b : a$   
 auch 8)  $d : b = c : a$

§. 188.

Beweis

Aus der ersten als richtig angenommenen Proportion folgt, daß  $ad = bc$ . Es ist aber (nach Lehrs. 3.) die 2te Proportion richtig, wenn  $ad = cb$ ; die dritte richtig, wenn  $bc = ad$ , die vierte richtig, wenn  $bc = da$  u. s. w.

§. 189.

Man übe sich hiebei, alle diese 7 Veränderungen sogleich aus der ersten Proportion zu lesen. Einige von diesen Veränderungen haben ihre eignen Namen erhalten; wir wollen davon nur folgende merken. Es entsteht die zweite Proportion aus der ersten durch Verwechslung (der mittlern Glieder) alternando:

Die dritte aus der ersten durch Vertauschung, (beider Verhältnisse) inuertendo.

Die

## der geometrischen Proportionen. 113

Die fünfte aus der ersten durch Vorsetzung  
(des letztern Verhältnisses) antepponendo.

Die siebende aus der ersten durch Zurück-  
lesung, relegendo.

Hieraus sind die Ausdrücke verständlich, wenn  
man sagt: wir wollen die Proportion verwechseln,  
verkehren &c.

### §. 190.

Eben so nöthig ist die Uebung, alle diese  
Proportionen aus der Gleichung  $ad = bc$  zu lesen,  
und überhaupt eine jede Gleichung in eine Propor-  
tion aufzulösen, welches allemal geschehen kan.

Wenn z. B.  $af = bnr$ , so wird sein  $a : b$   
 $= nr : f$ , oder auch  $a : br = n : f$ , auch  $a : bnr$   
 $1 : f$ , und dergleichen. Denn da in allen diesen  
Proportionen das Produkt der äußern Glieder die  
eine Seite, und das Produkt der innern Glieder  
die andere Seite der Gleichung giebt; so müssen  
nach Lehrsatz 3 alle diese Proportionen richtig sein.

Wenn  $d = ab$ ; so ist  $1 : a = b : d$ . Eben  
so folgt aus der Gleichung  $pqr = c$ , daß  $1 : pq$   
 $= r : c$ , auch daß  $p : 1 = c : qr$ . Die Glei-  
chung  $c(f + g) = 3pq$ , kan in folgende Pro-  
portionen aufgelöst werden:  $c : 3p = q : f + g$ ,  
 $c : 3 = pq : f + g$ ,  $p : f + g = c : 3q$ , u. a. m.  
Die Gleichung  $d = \frac{bc}{a}$  in folgende Proportion

$a : b = c : d$ , (Lehrsatz 2).

§

§. 191.

# 114 Sechstes Kapitel. Lehrsätze

§. 191.

Fünfter Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist

auch  $ma : mb = c : d$

auch  $ma : b = mc : d$

auch  $a : b = mc : md$ .

§. 192.

Beweis.

Alle diese Proportionen sind (nach Lehrsatz 3) richtig, wenn  $mad = mbc$ ; es folgt aber aus der ersten angenommenen Proportion, daß  $ad = bc$ , folglich ist auch  $mad = mbc$ .

§. 193.

Sechster Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist

auch  $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$

auch  $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$

auch  $a : \frac{b}{n} = \frac{c}{n} : d$

§. 194.

Beweis.

Eine jede von diesen Proportionen ist richtig, wenn gewis ist, daß  $\frac{a}{n} = \frac{bc}{n}$ , welches sein mus,

da aus der ersten Proportion folgt, daß  $ad = bc$ .

§. 195.



# Der geometrischen Proportionen. 115

§. 195.

Um die Richtigkeit der gewöhnlichen Verfahungsart in der Regeldetri mit Brüchen zu zeigen, kan man einen Theil des fünften Lehrsatzes auf folgende Weise vortragen.

Zu drei gegebenen Zahlen  $a, b, c$ , wird nach Lehrsatz 2 die vierte Proportionalzahl gefunden  $= \frac{bc}{a}$ ; z. B.

$$\text{in } a : b = c : x, \text{ ist } x = \frac{bc}{a}$$

es wird aber auch in der Proportion

$$na : nb = c : x \text{ sein } x = \frac{nbc}{na} = \frac{bc}{a}$$

$$\text{auch in } na : b = nc : x \text{ sein } x = \frac{bnc}{na} = \frac{bc}{a}$$

$$\text{auch in } mna : mb = nc : x \text{ sein } x = \frac{mbnc}{mna} = \frac{bc}{a}$$

woraus man deutlich einseht, daß diejenige Zahl, welche man durch die Regeldetri sucht, nämlich die vierte Proportionalzahl, unverändert heraus kömt, wenn gleich das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl multipliziert wird, oder wenn endlich auch beides zugleich geschieht. Durch eine geschickte Multiplikation zweier Glieder aber kan man allemal, wenn ein Glied oder beide Glieder Brüche sind, solche Glieder in ganze Zahlen verwandeln, z. B. in folgender Aufgabe:

5 2

Pfund

## 116 Sechstes Kapitel. Beispiele.

Pfund.    Pfund.    Mthr.    Mthr.

$$2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = 6 : x$$

das ist a)  $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 6 : x$

multiplirt man das erste und zweite Glied durch 3.5, so hat man

$$b) \underline{3 \cdot 5 \cdot 7} : \underline{3 \cdot 5 \cdot 23} = 6 : x$$

das ist c)  $35 : 69 = 6 : x$ , und findet  $x = \frac{69 \cdot 6}{35}$

Ferner in folgender Aufgabe:

Pfund.    —    Pfund.    Mthr.

$$1\frac{2}{3} : 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} : x$$

das ist A)  $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} : x$

multiplirt man die beiden ersten Glieder durch 4.5, so erhält man

$$B) \underline{4 \cdot 5 \cdot 7} : \underline{4 \cdot 5 \cdot 23} = \frac{2}{3} : x$$

$$\text{oder C) } 4 \cdot 7 : 5 \cdot 23 = \frac{2}{3} : x$$

Ferner das erste und dritte Glied durch 3 multiplirt,

$$\text{kommt D) } 4 \cdot 7 \cdot 3 : 5 \cdot 23 = \frac{2 \cdot 3}{3} : x$$

$$\text{oder E) } 84 : 115 = 2 : x$$

S. 196.

Vergleicht man nun die Proportion bei c) mit der bei a) und ferner die Proportion bei E) mit der bei A); so überfieht man fogleich die Richtigkeit der bekanten Regel, nach welcher man jeden Nenner im zweiten oder dritten Gliede wegstreicht und damit in das erste Glied multiplirt, und ferner den Nenner des ersten Gliedes wegstreicht und damit in das zweite oder dritte Glied multiplirt, um

## der geometrischen Proportionen. 117

um in allen dreien Gliedern ganze Zahlen zu erhalten.

§. 197.

Auf dem sechsten Lehrsatz gründen sich die bekannten Verkürzungen der Regeldetri durch gegenseitiges Aufheben oder gleichnamige Verkleinerung des ersten und zweiten, oder ersten und dritten Gliedes.

Man kan zu dieser Absicht einen Theil dieses Lehrsatzes auf folgende Weise vortragen.

In  $a : b = c : x$ , ist  $x = \frac{bc}{a}$

in  $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : x$ , ist auch  $x = \frac{bcn}{an} = \frac{bc}{a}$

in  $a : b = \frac{c}{n} : x$ , ist auch  $x = \frac{bcn}{na} = \frac{bc}{a}$

auch in  $\frac{a}{mn} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : x$  ist  $x = \frac{bcmn}{mna} = \frac{bc}{a}$

woraus erhellet, daß die durch die Regeldetri gefachte vierte Proportionalzahl unverändert herauskömmt, wenn man auch das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl dividirt hat, oder wenn beides zugleich geschehen ist.

§ 3

Siebens

## 116. Sechstes Kapitel. Uebersatz

Nat, daß  $\frac{a}{n} : \frac{m}{n} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$ , also auch, indem wiebet  
 $\frac{a}{n}$  nat  $\frac{m}{n}$  und  $\frac{b}{n}$  nat  $\frac{m}{n} : \frac{a}{n}$  geschrieben werden  
 kan, daß  $ad = bc$ .

§. 182.

Zweiter Lehrsatz.

In  $a : b = c : d$ , ist  $d = \frac{bc}{a}$ , d. i. die vierte

Proportionalzahl ist gleich dem Produkte der bei-  
 den innern Glieder durchs erste dividirt.

§. 183.

Beweis.

Es ist (erster Lehrsatz)  $ad = bc$ , folglich auch  
 (§. 55.)  $\frac{ad}{a} = \frac{bc}{a}$  das ist  $d = \frac{bc}{a}$ .

§. 184.

Folgerung.

Hieraus erbillet, daß man zu jeden drei ge-  
 gebnen Zahlen eine vierte Proportionalzahl finden  
 kan, indem man, wie auch die 3 Zahlen immer  
 gegeben sein mögen, doch allemal die beiden letz-  
 tern in einander multipliciren und dies Produkt  
 durch die erste Zahl dividiren, oder diese Division  
 doch wenigstens durch die gewöhnliche Bezeichnung  
 anzei-

## der geometrischen Proportionen. III

anzeigen kan, in welchem Falle der Werth des Quotienten durch einen Bruch angegeben wird.

§. 185.

Dritter Lehrsatz.

Wenn von vier Zahlen das Produkt der beiden äussern Zahlen gleich ist dem Produkte der beiden innern; so sind diese vier Zahlen in der Ordnung, worin sie geschrieben sind, proportional. Z. B.

Wenn von  $p, q, r, s$

ist  $p \cdot s = q \cdot r$

so ist  $p : q = r : s$

§. 186.

Beweis.

Wenn drei Zahlen,  $p, q, r$ , läßt sich eine vierte richtige Proportionalzahl finden, welche ist  $= qr$  (§. 184.) und es ist folgende Proportion richtig,

$p : q = r : qr$ . Es wird nun gefragt, ob

auch  $p : q = r : s$  richtig sei? Ganz gewiss; denn wenn, wie als wahr, angenommen und vorausgesetzt ist,  $ps = qr$ , so ist auch  $s = qr$ , folglich

die letztere Proportion nach allen einzelnen Gliedern mit der erstern gewis richtigen völlig einerlei.

# 112 Sechstes Kapitel. Lehrsätze.

§. 187.

## Vierter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$ ; so ist

auch 2)  $a : c = b : d$

auch 3)  $b : a = d : c$

auch 4)  $b : d = a : c$

auch 5)  $c : d = a : b$

auch 6)  $c : a = d : b$

auch 7)  $d : c = b : a$

auch 8)  $d : b = c : a$

§. 188.

## Beweis.

Aus der ersten als richtig angenommenen Proportion folgt, daß  $ad = bc$ . Es ist aber (nach Lehrs. 3.) die 2te Proportion richtig, wenn  $ad = cb$ ; die dritte richtig, wenn  $bc = ad$ , die vierte richtig  $bc = da$  u. s. w.

§. 189.

Man übe sich hiebei, alle diese 7 Veränderungen sogleich aus der ersten Proportion zu lesen. Einige von diesen Veränderungen haben ihre eignen Namen erhalten; wir wollen davon nur folgende merken. Es entsteht die zweite Proportion aus der ersten durch Verwechslung (der mittlern Glieder) alternando:

Die dritte aus der ersten durch Vertauschung, (beider Verhältnisse) inuertendo.

Die

## der geometrischen Proportionen. 113

Die fünfte aus der ersten durch Vorsetzung  
(des letztern Verhältnisses) anteponendo.

Die siebende aus der ersten durch Zurück-  
lesung, relegendo.

Hieraus sind die Ausdrücke verständlich, wenn  
man sagt: wir wollen die Proportion verwechseln,  
verkehren &c.

§. 190.

Eben so nöthig ist die Uebung, alle diese  
Proportionen aus der Gleichung  $a d = b c$  zu lesen,  
und überhaupt eine jede Gleichung in eine Propor-  
tion aufzulösen, welches allemal geschehen kan.

Wenn z. B.  $a f = b n r$ , so wird sein  $a : b$   
 $= n r : f$ , oder auch  $a : b r = n : f$ , auch  $a : b n r$   
 $= 1 : f$ , und dergleichen. Denn da in allen diesen  
Proportionen das Produkt der äußern Glieder die  
eine Seite, und das Produkt der innern Glieder  
die andere Seite der Gleichung giebt; so müssen,  
nach Lehrsatz 3 alle diese Proportionen richtig sein.

Wenn  $d = a b$ ; so ist  $1 : a = b : d$ . Eben  
so folgt aus der Gleichung  $p q r = c$ , daß  $1 : p q$   
 $= r : c$ , auch daß  $p : 1 = c : q r$ . Die Glei-  
chung  $c (f + g) = 3 p q$ , kan in folgende Pro-  
portionen aufgelöst werden:  $c : 3 p = q : f + g$ ,  
 $c : 3 = p q : f + g$ ,  $p : f + g = c : 3 q$ , u. a. m.  
Die Gleichung  $d = \frac{b c}{a}$  in folgende Proportion

$a : b = c : d$ , (Lehrsatz 2).

§

§. 191.

# 114 Sechstes Kapitel. Lehrsätze

§. 191.

Fünfter Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist

auch  $ma : mb = c : d$

auch  $ma : b = mc : d$

auch  $a : b = mc : md$ .

§. 192.

Beweis.

Alle diese Proportionen sind (nach Lehrsatz 3) richtig, wenn  $mad = mbc$ ; es folgt aber aus der ersten angenommenen Proportion, daß  $ad = bc$ , folglich ist auch  $mad = mbc$ .

§. 193.

Sechster Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist

auch  $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : d$

auch  $\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d$

auch  $a : b, = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$

§. 194.

Beweis.

Eine jede von diesen Proportionen ist richtig, wenn gewis ist, daß  $\frac{a}{n} \frac{d}{n} = \frac{b}{n} \frac{c}{n}$ , welches sein mus,

da aus der ersten Proportion folgt, daß  $ad = bc$ .

§. 195.



# Der geometrischen Proportionen. 115

§. 195.

Um die Richtigkeit der gewöhnlichen Verfahrungsart in der Regeldetri mit Brüchen zu zeigen, kan man einen Theil des fünften Lehrsatzes auf folgende Weise vortragen.

Zu drei gegebenen Zahlen  $a, b, c$ , wird nach Lehrsatz 2 die vierte Proportionalzahl gefunden  $= \frac{bc}{a}$ ; z. B.

$$\text{in } a : b = c : x, \text{ ist } x = \frac{bc}{a}$$

es wird aber auch in der Proportion

$$na : nb = c : x \text{ sein } x = \frac{nbc}{na} = \frac{bc}{a}$$

$$\text{auch in } na : b = nc : x \text{ sein } x = \frac{bnc}{na} = \frac{bc}{a}$$

$$\text{auch in } mna : mb = nc : x \text{ sein } x = \frac{mbnc}{mna} = \frac{bc}{a}$$

woraus man deutlich einseht, daß diejenige Zahl, welche man durch die Regeldetri sucht, nämlich die vierte Proportionalzahl, unverändert heraus kömmt, wenn gleich das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl multipliziert wird, oder wenn endlich auch beides zugleich geschieht. Durch eine geschifte Multiplikation zweier Glieder aber kan man allemal, wenn ein Glied oder beide Glieder Brüche sind, solche Glieder in ganze Zahlen verwandeln, z. B. in folgender Aufgabe:

5 2

Pfund

# 116 . Sechstes Kapitel. Lehrsätze . 1

Pfund.    Pfund.    Mhlr.    Mhlr.

$$2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2} = 6 : x$$

das ist a)  $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} = 6 : x$

multiplirt man das erste und zweite Glied durch 3.5, so hat man

$$b) \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 23} = 6 : x$$

das ist c)  $35 : 69 = 6 : x$ , und findet  $x = \frac{69 \cdot 6}{35}$

Ferner in folgender Aufgabe:

Pfund.    Pfund.    Mhlr.

$$1\frac{2}{3} : 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} : x$$

das ist A)  $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} : x$

multiplirt man die beiden ersten Glieder durch 4.5, so erhält man

$$B) \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 23} = \frac{2}{3} : x$$

$$\text{oder C) } 4 \cdot 7 : 5 \cdot 23 = \frac{2}{3} : x$$

Ferner das erste und dritte Glied durch 3 multiplirt,

$$\text{kommt D) } 4 \cdot 7 \cdot 3 : 5 \cdot 23 = \frac{2 \cdot 3}{3} : x$$

$$\text{oder E) } 84 : 115 = 2 : x$$

S. 196.

Vergleicht man nun die Proportion bei c) mit der bei a) und ferner die Proportion bei E) mit der bei A); so übersieht man sogleich die Richtigkeit der bekannten Regel, nach welcher man jeden Nenner im zweiten oder dritten Gliede wegstreicht und damit in das erste Glied multiplicirt, und ferner den Nenner des ersten Gliedes wegstreicht und damit in das zweite oder dritte Glied multiplicirt;

um

## der geometrischen Proportionen. 117

um in allen diesen Gliedern ganze Zahlen zu erhalten.

§. 197.

Auf dem sechsten Lehrsatz gründen sich die bekannten Verkürzungen der Regelketten durch gegenseitiges Aufheben oder gleichnamige Verkleinerung des ersten und zweiten, oder ersten und dritten Gliedes.

Man kann zu dieser Absicht einen Theil dieses Lehrsatzes auf folgende Weise vortragen.

In  $a : b = c : x$ , ist  $x = \frac{bc}{a}$

in  $\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = c : x$ , ist auch  $x = \frac{bcn}{an} = \frac{bc}{a}$

in  $\frac{a}{h} : b = \frac{c}{n} : x$ , ist auch  $x = \frac{bcn}{na} = \frac{bc}{a}$

auch in  $\frac{a}{mn} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : x$  ist  $x = \frac{bc mn}{mna} = \frac{bc}{a}$

daraus erhellet, daß die durch die Regelketten gesuchte vierte Proportionalzahl unverändert herauskömmt, wenn man auch das erste und zweite, oder das erste und dritte Glied durch einerlei Zahl dividirt hat, oder wenn beides zugleich geschehen ist.

§ 3

Siebens

# Siebentes Kapitel.

## Anwendung der Lehrsätze von der Proportion zur Auflösung algebraischer Aufgaben.

§. 198.

### XLV. Aufgabe.

Ich habe etliche Ellen Tuch gekauft, und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthlr.; darauf habe ich alles Tuch wieder verkauft, je 7 Ellen für 11 Rthlr. und bei diesem ganzen Handel 100 Rthlr. gewonnen: wie viel Ellen Tuch hab ich gehabt?

§. 199.

= Auflösung. =

Die Anzahl der Ellen sei  $x$ . Man berechne nun nach der Regel de tri wie viel  $x$  Ellen beim Einkauf gekostet haben.

So oft 5 Ellen enthalten sind in  $x$  Ellen; so oft ist auch der Preis von 5 Ellen enthalten in dem Preise von  $x$  Ellen; demnach ist

Ellen	Ellen	Rthlr.
-------	-------	--------

$5 : x = 7 :$  der Anzahl von Rthlr. welche  $x$  Ellen beim Einkauf kosteten, und welche also als die 4te Proportionalzahl ist  $= \frac{7x}{1}$  Rthlr.

So

## Siebentes Kap. Anwendung 1c. 119

So viel hab ich also beim Einkauf ausgegeben,  
und eben so wird

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ellen} & \text{Ellen} & \text{Rthlr.} & \text{Rthlr.} & & & \\ \text{nach } 7 & : & x & = & 11 & : & 11x \end{array} \text{ gefunden,}$$

daß ich  $11x$  Rthlr. beim Verkauf gelöst habe.

Da ich nun 100 Rthlr. gewonnen habe; so mus  
ich beim Verkauf 100 Rthlr. mehr eingenommen  
haben, als ich beim Einkauf ausgegeben hatte;  
also mus sein

$$\begin{array}{l} 11x - 7x + 100, \text{ folglich auch } 5 \cdot 7 \cdot 11x \\ \hline = 5 \cdot 7 \cdot 7x + 5 \cdot 7 \cdot 100 \text{ das ist } 55x = 49x + 3500, \end{array}$$

$$\text{daher, } 6x = 3500, \text{ und } x = \frac{3500}{6} = 583\frac{1}{3}$$

Antwort: Es waren  $583\frac{1}{3}$  Ellen. Nun fin-  
det man nach der Regel de tri, daß  $583\frac{1}{3}$  nach den  
angegebenen Preisen beim Einkauf  $816\frac{2}{3}$  Rthlr. ge-  
kostet haben; beim Verkauf aber für  $916\frac{2}{3}$  Rthlr.  
verkauft sind, also 100 Rthlr. gewonnen ist.

§. 200. — 1721 (b) 10

### XLVI. Aufgabe.

Ein Springbrunnen hat 4 Röhren: durch  
die erste allein wird die Cisterne, dessen Inhalt un-  
bekant ist, in 2 Stunden vol, durch die zweite Röhre,  
in 3 Stunden, durch die dritte in 4 Stunden, und  
durch die vierte in 6 Stunden. Wie bald wird die  
Cisterne angefüllt, wenn alle 4 Röhren zugleich laufen.

§ 4

§. 201.

# 120 Siebentes Kap. Anw. der Lehrsätze

§. 201.

Auflösung.

Der Inhalt der Cisterne sei  $= y$  Maß, die gesuchte Zeit  $= x$  Stunden, so wird sein  
 Stund. Stund. Maß: demjenigen, was in  $x$  Stund. läuft

$$2 : x = y : \frac{xy}{2} \text{ aus der ersten Röhre}$$

$$3 : x = y : \frac{xy}{3} \text{ aus der zweiten Röhre}$$

$$4 : x = y : \frac{xy}{4} \text{ aus der dritten Röhre}$$

$$6 : x = y : \frac{xy}{6} \text{ aus der vierten Röhre}$$

In  $x$  Stunden läuft demnach aus allen 4 Röhren zusammen heraus  $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{3} + \frac{xy}{4} + \frac{xy}{6}$

oder  $(6xy + 4xy + 3xy + 2xy) : 12$   
 das ist  $\frac{15xy}{12}$  Maß. Da nun diese Quantität ge-

rade die ganze Cisterne anfüllen sol; so muss  
 sein  $\frac{15xy}{12} = y$

also auch  $\frac{15x}{12} = 12$ , durch  $y$  dividirt

$$15x = 12, \text{ daher } x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

In  $\frac{4}{5}$  Stunden läuft nun aus der ersten Röhre  $2y$ , aus der zweiten  $4y$ , aus der dritten  $y$ , aus

der vierten  $2y$ ; und es ist in der That  $2y + 4y$

$$+ y + 2y = 6y + 4y + 3y + 2y = 15y = y.$$

§. 202.

§. 202.

XLVII. Aufgabe.

Ich habe für jemanden 906 Rthlr. eingenommen, und sol ihm davon gerade so viel schiffen, daß das Geld, was er erhält, mit dem Postgelde, welches ich an meinem Orte bezahlen mus, und welches  $\frac{2}{3}$  Rthlr. pro Cent. beträgt, genau die eingenommene Summe ausmacht. Wie viel mus ich auf die Post geben?

§. 203.

Auflösung.

Wenn ich  $x$  Rthlr. auf die Post gebe; so finde ich nach der Regel de tri 100 Rthlr. geben 2 Rthlr. was geben  $x$  Rthlr.? daß von  $x$  Rthlr. das Postgeld  $\frac{2}{3}x$  beträgt. Folglich wird

$x$  die verlangte Zahl von <sup>300</sup>Rthlr. angeben, wenn es so groß angenommen wird

$$\text{daß } x + \frac{2}{3}x = 906; \text{ also mus}$$

$$\text{auch sein } \frac{300}{300}x + 2x = 271800$$

$$\text{das ist } 302x = 271800$$

$$\text{daher } x = \frac{271800}{302} = 900 \text{ Rthlr.}$$

Antw. Ich mus <sup>302</sup>900 Rthlr. auf die Post geben; so wird das Postgeld davon  $\frac{2}{3} \cdot 900$  Rthlr. das ist 6 Rthlr., also das abgeschifte Geld nebst dem Postgelde allerdings 906 Rthlr. betragen.

§ 5

§. 204.

§. 204.

## XLVIII. Aufgabe.

Ich bin Jemanden ein Kapital  $c$  schuldig: bei der Auszahlung fallen aber verschiedene Unkosten vor, z. B. für Porto, Agio, Expedition und dergleichen, welche sich auf  $u$  Rthlr. pro Cent. belaufen, und welche nicht ich, sondern der andere tragen mus: wie viel Geld mus ich auszahlen, damit das ausgezahlte Geld mit denen dabei vorfallenden Unkosten gerade das Kapital  $c$  ausmacht?

§. 205.

## Auflösung.

Ich zahle aus  $x$  Rthlr.

Nun geben 100 Rthlr.  $u$  Rthlr. Unkosten, folglich  $x$  Rthlr. geben  $\frac{u}{100} x$  Rthlr. Unkosten;

$$\text{demnach mus } x + \frac{u}{100} x = c$$

$$\text{daher auch } 100 x + u x = 1000 c$$

$$\text{oder } (100 + u) x = 1000 c$$

$$\text{daher } x = \frac{1000 c}{100 + u} \text{ genommen werden}$$

In der vorigen Aufgabe war  $c = 906$ ,  $u = \frac{2}{3}$  und man würde nach dieser Formel die abzuschickende Summe  $x = \frac{90600}{100 + \frac{2}{3}} = 90600 : 302$

$$= \frac{90600 \cdot 3}{302} = 900 \text{ Rthlr. wie in der vorigen Auflösung finden.}$$

§. 206.



§. 206.

XLIX. Aufgabe.

Wie viel Geld mus ich ausleihen, wenn mir mit den einjährigen Zinsen à 5 pro Cent. nach einem Jahre gerade 1200 Rthlr. zurückgezahlt werden sollen?

§. 207.

Auflösung.

Ich verleihe x Rthlr. Nun ist  
Rthlr. Kapital. Rthlr. Kapst. Rthlr. Zinsen. Rthlr. Zinsen.

$$100 : x = 5 : \frac{5x}{100}$$

daher mus x so gros genommen werden,

$$\text{daß } x + \frac{5x}{100} = 1200 \text{ werde, also}$$

$$\text{auch } 105x = 120000$$

$$\text{und } x = \frac{120000}{105} = 1142 \frac{2}{3} \text{ Rthlr. sein}$$

$$x = 1142 \frac{2}{3}$$

Auch diese Aufgabe hätte nach der §. 205. gefundenen Formel sogleich berechnet werden können, wo e die verlangte Schuld von 1200 Rthlr. und u die 5 Rthlr. einjährigen Zinsen von jedem 100 Rthlr. bedeuten kan, und man würde nach der allgemeinen Formel,  $x = \frac{100 \cdot c}{100 + u}$ , für diesen bestimmten ein-

$$\text{zelnen Fal ebenfalls finden } x = \frac{120000}{105}$$

1142 2/3

§. 208.

## 124 Siebentes Kap. Vom der Lehrsätze

§. 208.

### L. Aufgabe.

Ein Weinbändler hat Franzwein, wovon 60 Maß 10 Rthlr. kosten, und Landwein, wovon 52 Maß nur 4 Rthlr. kosten, und wil aus beiden eine Vermischung machen, wovon er 51 Maß um 5 Rthlr. geben kan. Wie viel Maß Landwein und wie viel Maß Franzwein mus er zu diesen 51 Maß nehmen?

§. 209.

### Auflösung.

Man seze er müsse  $x$  Maß Franzwein nehmen; so mus das übrige von 51 Maß, das ist,  $51 - x$  die nöthigen Maße Landwein anzeigen. Man rechne nach der Regel de tri

60 Maß Franzw. kosten 10 Rthlr. was  $x$  Maß?

Antwort:  $\frac{x}{6}$  Rthlr.

52 Maß Landw. kosten 4 Rthlr. was  $51 - x$  Maß?

Antwort:  $4 \cdot (51 - x) = 51 - x$  Rthlr.

Da nun die ganze Vermischung von 51 Maß 5 Rthlr. kosten sol: so mus sein

$$\frac{x}{6} + 51 - x = 5,$$

$$\text{daher ferner } 13x + 306 - 6x = 390,$$

$$7x = 84$$

$$x = 12$$

Antwort.

## V. d. Proport. beiliegende Aufgaben. 125

Antwort. Man mus 12 Maß Franzwein und 31 — 12 das ist 39 Maß Landwein mit einander vermischen; so werden die 12 Maß Franzwein 2 Rthlr. die 39 Maß Landwein 3 Rthlr. also alle 51 Maß der Vermischung 5 Rthlr. kosten

§. 210.

### LI. Aufgabe.

Von einem bessern Weine kosten a Maß b Rthlr. von einem geringern c Maß d Rthlr.; aus beiden sollen f Maß dergestalt zusammengemischt werden, daß p Maß von dieser Vermischung für q Rthlr. verkauft werden können. Wie viel mus von dem bessern Weine, wie viel von dem schlechtern genommen werden?

§. 211.

### Auflösung.

Von dem bessern Weine werden genommen x Maß, von den schlechtern (f — x) Maß.

So viele mal mehr oder weniger nun a Maß ist als x Maß, so vielmal mehr oder weniger beträgt auch der Preis von a Maß, als der Preis von x Maß. Demnach ist

Maß    Maß    Rthlr.    in Rthln.

a : x = b : dem Preise von x Maß;  
folglich giebt die vierte Proportionalzahl  $\frac{bx}{a}$  den

Preis von x Maß an. Eben so ist

Maß    Maß    Rthlr.    derjenigen Zahl von Thalern

c : f — x = d :

welche

## 126 Siebentes Kap. Anw. des Lehrsatz

werthe  $f - x$  Maß von dem schlechtern Weine kosten.  
Da nun diese vierte Proportionalzahl  $= \frac{d(f - x)}{c}$

gefunden wird, so ist  $\frac{bx}{a} + \frac{d(f - x)}{c} =$  dem

Preise von  $f$  Maß des vermischten Weines.  
Wie viel nun diese  $f$  Maß kosten müssen, kan leicht  
aus der gegebenen Bestimmung gefunden werden,  
daß  $p$  Maß  $q$  Rthlr. kosten sollen. Es ist näm-  
lich auch hier

Maß, Maß, der Preis von  $p$  Maß, dem Preise von  $f$  Maß,  
 $p : f = q \text{ Rthlr.} : \frac{fq}{p} \text{ Rthlr.}$

Also mus sein

$$\frac{bx}{a} + \frac{df - dx}{c} = \frac{fq}{p}, \text{ also auch durch } ac$$

multiplirt,  $bcx + adf - adx = \frac{acfq}{p}$

und  $bcx - adx = \frac{acfq}{p} - adf$

oder  $(bc - ad)x = \frac{acfq - adfp}{p}$

$$\text{folglich } x = \frac{acfq - adfp}{p(bc - ad)} = af \cdot \frac{cq - dp}{p(bc - ad)}$$

denn stat  $acfq - adfp$  kan man nach §. 212  
schreiben  $af \cdot (cq - pd)$  wodurch offenbar die  
Rechnung sehr erleichtert wird.

§. 212.

Diese Formel giebt nun die unter dem Namen der Allegations- oder Vermischungsrechnung bekannte Rechnungsregel in ihrer größten Allgemeinheit an, und es kan auch im gemeinen Leben oft nützlich und nöthig sein, einige ähnliche Aufgaben so allgemein aufzulösen. In den gemeinen Rechenbüchern pflegt man sich indessen auf so verwickelte Aufgaben nicht einzulassen; sondern behandelt nur gewisse einzelne Fälle, welche entweder die gewöhnlichsten, oder doch so beschaffen sind, daß man die übrigen durch hinlängliche Vorbereitung, obgleich oft mit einiger Weitläufigkeit, darauf zurückbringen kan. Ein Weinhandler weiß es z. B. schon, oder kan es doch durch Berechnung finden, wie viel einerlei Quantität, als ein Orhst, ein Anker, ein Maß u. d. sowol von seinem bessern als schlechteren Weine kostet und von der Vermischung kosten sol, sobald er überhaupt den Preis von irgend einer andern Quantität dieser Weine weiß. Daher kan man in den gewöhnlichsten Fällen zurechte kommen, wenn man nur folgende Aufgabe aufzulösen weiß.

§. 213.

## LII. Aufgabe.

Ein gewisses Maß (es sei ein Orhst, oder Anker o. d.) guter Wein kostet  $g$  Rthlr. eben dasselbe Maß von dem schlechteren Weine kostet  $s$  Rthlr. man sol eine Mischung von beiden machen, wovon  
ein

## 128 Siebentes Kap. Antw. der Lehrsätze

ein solches Maß auf  $m$  Rthlr. zu stehen kommt; wie viel muß man zu diesem Maße solcher Vermischung von dem guten, wie viel von dem schlechtern Weine nehmen?

§. 214.

Auflösung.

Derjenige Theil dieses Maßes, welcher von dem guten genommen werden muß, sei  $= x$ , so muß der übrige Theil  $1 - x$  von dem schlechtern Weine genommen werden.

Nach  $1 : g = x : gx$

und  $1 : s = 1 - x : s - sx$

findet man nun, daß der Theil des guten Weines, welcher zur Vermischung genommen wird,  $gx$  Rthlr. der übrige Theil des schlechtern  $s - sx$  Rthlr. kostet. Wenn daher die ganze Vermischung  $m$  Rthlr. kosten soll; so muß sein

$$gx + s - sx = m$$

daher auch  $gx - sx = m - s$

oder  $(g - s)x = m - s$

$$\text{daher } x = \frac{m - s}{g - s}$$

§. 215.

Diese Formel giebt nun die bekante Regel der Allegationsrechnung an; nach welcher man 1) von dem Preise der Vermischung den Preis des schlechtern Weines, 2) von dem Preise des bessern Weines den Preis des schlechtern abzieht, 3) durch die  
 letzte

## v. d. Proport. bei algebr. Aufgaben. 129

letzte Differenz in die erstere dividirt und dadurch den Theil, welcher von dem besten Weine genommen werden mus, in einer gebrochenen Zahl erhält.

§. 216.

Es braucht wol kaum erinnert zu werden, daß die Buchstaben m, g, s, welche hier die Preise verschiedner Weine bedeuten, eben so wol auch die Preise verschiedener andern Sachen bedeuten können, welche mit einander vermischet werden sollen; und daß allemal der für x gefundene Werth diejenige Quantität anzeigt, welche von der bessern Sache zur Vermischung zu nehmen ist, wenn man immer g den Preis der bessern Sache, s den Preis der schlechtern und m den Preis der Vermischung bedeuten läßt. Z. B. wenn folgende Aufgabe: Es wil jemand Roggen, wovon der Scheffel 2 Rthlr. und Gersten, wovon der Scheffel  $1\frac{1}{4}$  Rthlr. kostet; dergestalt vermischen, daß ein Scheffel dieses vermischten Getraides auf  $1\frac{1}{2}$  Rthlr. zu stehen komt; wie viel Roggen und wie viel Gersten mus er zu einem Scheffel vermischten Getraides nehmen? — mit der vorhergehenden allgemeinen Aufgabe verglichen wird: so ist nach obiger Formel der Theil, welcher vom bessern Getraide, dem Roggen zu nehmen ist,  $x = \frac{m - s}{g - s}$

$$\begin{aligned} &= (1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) : (2 - 1\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \text{ (p. 8. VI.)} \\ &= \frac{1}{3}, \text{ und der übrige Theil von Gersten also} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ Scheffel.} \end{aligned}$$

3

§. 217.

§. 217.

## LIII. Aufgabe.

Ein Wechsler hat zweierlei Münze; von der ersten Sorte gehen  $a$  Stück auf einen Rthlr. von der zweiten Sorte  $b$  Stück. Nun will jemand  $c$  Stück für einen Rthlr. haben; wie viel Stück wird der Wechsler von der ersten, wie viel von der zweiten Sorte geben müssen?

§. 218.

## Auflösung.

Der Wechsler gebe von der ersten Sorte  $x$  Stück, also von der andern  $c - x$ ; so sind die  $x$  Stück von der ersten Sorte Werth  $\frac{x}{a}$  Rthlr. indem

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$ , und die  $c - x$  Stück von der letztern Sorte werth  $\frac{c - x}{b}$  Rthlr. indem  $b : 1 =$

$$x : \frac{c - x}{b};$$

Also mus, sein  $\frac{x}{a} + \frac{c - x}{b} = 1$ ,

folglich auch  $bx + ac - ax = ab$ ,  
und  $bx - ax = ab - ac$ ,

$$\begin{aligned} &= -ac, \\ &= \frac{a(b - c)}{b - a}. \end{aligned}$$

§. 219.



## v. d. Proport. bei algebr. Aufgaben. 131

§. 219.

Wenn man diese Gleichung  $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$

nach §. 190. in folgende Proportion  $b-a : b-c = a : x$  auflöst; so siehet man, auf welche Art man  $x$  durch die Regel de tri aus den gegebenen Zahlen finden könne.

§. 220.

### LIV. Aufgabe.

Ein Wechsler hat 2 und 4 Gr. Stücke; es wil jemand 10 Stücke Geld haben, welche 1 Rthlr. werth sind. Wie viel mus der Wechsler von jeder Sorte geben?

§. 221.

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist  $a=6$ ,  $b=12$ ,  $c=10$ , daher findet man sogleich nach der Formel  $x = \frac{a(b-c)}{b-a} = \frac{6(12-10)}{12-6} = \frac{6 \cdot 2}{6} = 2$ , wel-

ches die Anzahl der 4 Gr. Stücke sein mus, so wie  $10 - 2$ , das ist 8, die Anzahl der 2 Gr. Stücke ist.

Nachdem die im sechsten Kapitel vorgetragenen Lehrsätze bekant gemacht, und durch einige Aufgaben dieses Kapitels geübt sind, können die unter den Nummern 37... 42. angeführten Sätze von der Aehnlichkeit und Proportion der Figuren und Linien vorgenommen werden.

3 2

Achtes

## Achstes Kapitel.

### Von der Multiplikation und Division in Linien.

---

§. 222.

Daß in einer jeden Proportion  $a:b = c:d$ , allemal  $d = \frac{bc}{a}$  ist §. 182. gelehrt worden.

Setzt man nun  $a = 1$ , so ist in  $1:b = c:d$ , die vierte Proportionalzahl  $d (= \frac{bc}{1}) = bc =$  dem

Produkte der beiden mittlern Glieder. Eben so ist in  $1:mn = p:d$  die vierte Proportionalzahl

$d = \frac{mnp}{1} =$  einem Produkte, dessen beide

Faktoren,  $mn$  und  $p$ , die beiden innern Glieder der

Proportion ausmachen; und man kan demnach sagen, multipliciren heiße die vierte Proportionalzahl zur Einheit und den beiden Faktoren finden.

§. 223.

Wenn ich ferner in einer Proportion das 2te Glied  $= 1$  setze: so ist in  $a:1 = c:d$ ,  $d = \frac{c}{a} =$  dem Quotienten, welcher durch die Division von

a in c entsteht. Dividiren heißt daher die vierte Proportionalzahl zu dem Divisor, der Einheit und dem Dividendus finden.

§. 224.

Diese Betrachtung gibt uns nun sehr deutliche Begriffe von dem Produkte und dem Quotienten, nach welchen das Produkt P aus zweien Faktoren A und B eine Zahl ist, in welcher der eine Faktor B eben so enthalten ist, wie die Einheit (1) in dem ersten Faktor A, indem  $1 : A = B : P$ , und der Quotient Q aus S eine Zahl ist, welche

aus dem Dividendus  $S$  eben so, wie die Einheit aus dem Divisor entsteht, indem  $R:1 = S:Q$  ist. Diese Begriffe sind bei der Anwendung sowol der gewöhnlichen als allgemeinen Zahlenrechnung auf geometrische Größen von ungemeinem Nutzen, weil sie uns die Uebereinstimmung gewisser geometrischen Operationen mit der Multiplikation und Division in Zahlen deutlich vor Augen stellen. Bevor wir aber dieses weiter entwickeln, wollen wir noch einige Begriffe von der Multiplikation zweier benannten Zahlen etwas auseinandersetzen.

§. 225.

Wenn ich sage: 1 Pfund kostet 4 Groschen,  
also kosten 6 Pf. 24 Gr.; so schließe ich, es mus-  
sich verhalten 1 Pf. : 6 Pf. = 4 Gr. zu der Anzahl  
3 3 Groschen,

## 134 Achtes Kap. Von der Multiplik.

Groschen, welche 6 Pf. kosten. Diese 24 Groschen entstehen also, indem zwei benannte Zahlen, nämlich die Zahl der Groschen 4 und die Zahl der Pfunde 6 in einander multiplicirt werden. Kan ich aber nun wohl sagen, daß 4 Groschen durch 6 Pfund multiplicirt, oder 4 Groschen 6 Pfund mal genommen werden? Wenn bei dieser Multiplikation die Art und Größe der Einheit worauf sich die Zahl 6 beziehet, welche hier ein gewisses Gewicht, 1 Pfund ist, auf das erhaltene Produkt von 24 Gr. wirklich einigen Einfluss hätte; so könnte ich gewis nicht auch in folgenden Aufgaben: 1 Elle kostet 4 Gr. was kosten 6 Ellen; oder 1 Centner kostet 4 Gr. was kosten 6 Centner; oder 1 Schof Äpfel kostet 4 Gr. was kosten 6 Schof Äpfel, beständig dasselbe Produkt von 24 Gr. erhalten, weil alsdann 4 Gr. 6 Ellen mal, oder 4 Gr. 6 Schof Äpfel mal genommen nothwendig etwas anders geben müßten, als 4 Gr. 6 Pfund mal genommen. Dies mus uns sogleich auf die Gedanken bringen, daß die Einheit, worauf sich die Zahl 6 beziehet, gar keinen Einfluss auf das Produkt 24 Gr. haben kan, und in der That hat es mit der Multiplikation zweier benannten Zahlen folgende Verwandnis. Nur der Eine Faktor, in den angegebenen Fällen die 4 Gr., wird wirklich als eine benannte Zahl betrachtet, den man daher den Realfaktor nennen kan; der andere Faktor mus nur als eine ganz allgemeine Zahl angesehen werden, welche durch ihren Werth anzeigt, wie oft die allgemeine  
Einheit

Einheit (1) in ihr enthalten sei, und also auch der Realfaktor in dem Produkte enthalten sein soll. Ich mögte diesen letztern Faktor den Rationalfaktor nennen, weil er das Verhältnis angibt, worin er selbst gegen die Einheit steht, und worin also auch das Produkt gegen den Realfaktor stehen soll.

Auch in folgender Aufgabe: 1 Rthlr. Kapital gibt  $\frac{1}{80}$  Rthlr. Zinse, was geben 4 Rthlr. Kapital? wo nach der Proportion

$$\begin{aligned} 1 \text{ Rthlr. Kapital} &: 4 \text{ Rthlr. Kapital} \\ = \frac{1}{80} \text{ Rthlr. Zinse} &: \frac{4 \cdot 5}{100} \text{ Rthlr. Zinse,} \end{aligned}$$

die gesuchten Zinsen gefunden werden, indem man 4 Rthlr. Kapital in die  $\frac{1}{80}$  Rthlr. Zinsen multiplicirt, und wo also diese beiden benannten Zahlen sich auf einerlei Einheit, nämlich 1 Rthlr. beziehen, wird doch der eine Rationalfaktor 4 offenbar nur als eine unbenannte Zahl angesehen. Eben so kan ich auch von den beiden benannten Zahlen 2 Sol und 3 Sol gar wol sagen; ich wil 2 Sol 3-mal nehmen, oder auch, ich wil 3 Sol 2 mal nehmen; aber man sollte nie sagen, daß man 3 Sol durch 2 Sol multipliciren wolle: indem 3 Sol 2 Sol mal nehmen, eben so wenig einen schicklichen Sinn haben kan, als 3 Rthlr. 2 Rthlr. mal oder 4 gr. 6 Pf. mal nehmen. Es wird vielmehr auch hier der eine von den beiden Faktoren z. B. 3" als der Realfaktor und der andere 2, als der Rationalfaktor angesehen und in der Proportion:  $1:2 = 3":6"$  das vierte Glied, als das Produkt von  $2 \cdot 3"$ , gleich 6" gefunden.

## 128 Siebentes Kap. Antw. der Lehrsätze

ein solches Maß auf m Rthlr. zu stehen kommt; wie viel muß man zu diesem Maße solcher Vermischung von dem guten, wie viel von dem schlechtern Weine nehmen?

§. 214.

Auflösung.

Derjenige Theil dieses Maßes, welcher von dem guten genommen werden muß, sei  $= x$ , so muß der übrige Theil  $1 - x$  von dem schlechtern Weine genommen werden.

Nach  $1 : g = x : gx$

und  $1 : s = 1 - x : s - sx$

findet man nun, das der Theil des guten Weines, welcher zur Vermischung genommen wird,  $gx$  Rthlr. der übrige Theil des schlechtern  $s - sx$  Rthlr. kostet. Wenn daher die ganze Vermischung m Rthlr. kosten sol; so muß sein

$$gx + s - sx = m$$

daher auch  $gx - sx = m - s$

oder  $(g - s)x = m - s$

$$\text{daher } x = \frac{m - s}{g - s}$$

§. 215.

Diese Formel giebt nun die bekante Regel der Allegationsrechnung an; nach welcher man 1) von dem Preise der Vermischung den Preis des schlechtern Weines, 2) von dem Preise des bessern Weines den Preis des schlechtern abzieht, 3) durch die  
 letzte

## v. d. Proport. bei algebr. Aufgaben. 129

letzte Differenz in die erstere dividirt und dadurch den Theil, welcher von dem besten Weine genommen werden mus, in einer gebrochenen Zahl erhält.

§. 216.

Es braucht wol kaum erinnert zu werden, daß die Buchstaben m, g, s, welche hier die Preise verschiedner Weine bedeuten, eben so wol auch die Preise verschiedener andern Sachen bedeuten können, welche mit einander vermischt werden sollen; und daß allemal der für x gefundene Werth diejenige Quantität anzeigt, welche von der bessern Sache zur Vermischung zu nehmen ist, wenn man immer g den Preis der bessern Sache, s den Preis der schlechtern und m den Preis der Vermischung bedeuten läßt. Z. B. wenn folgende Aufgabe: Es wil jemand Roggen, wovon der Scheffel 2 Rthlr. und Gersten, wovon der Scheffel  $1\frac{1}{4}$  Rthlr. kostet; dergestalt vermischen, daß ein Scheffel dieses vermischten Getraides auf  $1\frac{1}{2}$  Rthlr. zu stehen komt; wie viel Roggen und wie viel Gersten mus er zu einem Scheffel vermischten Getraides nehmen? — mit der vorhergehenden allgemeinen Aufgabe verglichen wird: so ist nach obiger Formel der Theil, welcher vom bessern Getraide, dem Roggen zu nehmen ist,  $x = \frac{m - s}{g - s}$

$$= (1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) : (2 - 1\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \text{ (p. 8. VI.)}$$

$$= \frac{1}{3}, \text{ und der übrige Theil von Gersten also}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ Scheffel.}$$

3

§. 217.

# 130 Siebentes Kap. Anw. der Behrsätze

§. 217.

## LIII. Aufgabe.

Ein Wechsler hat zweierlei Münze; von der ersten Sorte gehen  $a$  Stük auf einen Rthlr. von der zweiten Sorte  $b$  Stük. Nun wil jemand  $c$  Stük für einen Rthlr. haben; wie viel Stük wird der Wechsler von der ersten, wie viel von der zweiten Sorte geben müssen?

§. 218.

## Auflösung.

Der Wechsler gebe von der ersten Sorte  $x$  Stük, also von der andern  $c - x$ ; so sind die  $x$  Stük von der ersten Sorte Werth  $\frac{x}{a}$  Rthlr. indem

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$ , und die  $c - x$  Stük von der letz-

tern Sorte werth  $\frac{c - x}{b}$  Rthlr. indem  $b : 1 =$

$x : \frac{c - x}{b}$ ;

Also mus/ sein  $\frac{x}{a} + \frac{c - x}{b} = 1$ ,

folglich auch  $bx + ac - ax = ab$ ,

und  $bx - ax = ab - ac$ ,

oder  $(b - a)x = ab - ac$ ,

daher  $x = \frac{ab - ac}{b - a} = \frac{a(b - c)}{b - a}$ .

§. 219.



## v. d. Proport. bei algebr. Aufgaben. 131

§. 219.

Wenn man diese Gleichung  $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$

nach §. 190. in folgende Proportion  $b-a : b-c = a : x$  auflöst; so siehet man, auf welche Art man  $x$  durch die Regel de tri aus den gegebenen Zahlen finden könne.

§. 220.

### LIV. Aufgabe.

Ein Wechsler hat 2 und 4 Gr. Stücke; es wil jemand 10 Stücke Geld haben, welche 1 Rthlr. werth sind. Wie viel mus der Wechsler von jeder Sorte geben?

§. 221.

#### Auflösung.

In dieser Aufgabe ist  $a=6$ ,  $b=12$ ,  $c=10$ , daher findet man sogleich nach der Formel  $x = \frac{a(b-c)}{b-a} = \frac{6(12-10)}{12-6} = \frac{6 \cdot 2}{6} = 2$ , wel-

ches die Anzahl der 4 Gr. Stücke sein mus, so wie  $10 - 2$ , das ist 8, die Anzahl der 2 Gr. Stücke ist.

Nachdem die im sechsten Kapitel vorgetragenen Lehrsätze bekant gemacht, und durch einige Aufgaben dieses Kapitels geübt sind, können die unter den Nummern 37... 42. angeführten Sätze von der Aehnlichkeit und Proportion der Figuren und Linien vorgenommen werden.

## Achstes Kapitel.

### Von der Multiplikation und Division in Limen.

---

§. 222.

Daß in einer jeden Proportion  $a:b = c:d$ , allemal  $d = \frac{bc}{a}$  ist §. 182. gelehrt worden.

Setzt man nun  $a = 1$ , so ist in  $1:b = c:d$ , die vierte Proportionalzahl  $d (= \frac{bc}{1}) = bc =$  dem

Produkte der beiden mittlern Glieder. Eben so ist in  $1:mn = p:d$  die vierte Proportionalzahl

$d = \frac{mnp}{1} =$  einem Produkte, dessen beide

Faktoren,  $mn$  und  $p$ , die beiden innern Glieder der

Proportion ausmachen; und man kan demnach sagen, multipliciren heiße die vierte Proportionalzahl zur Einheit und den beiden Faktoren finden.

§. 223.

Wenn ich ferner in einer Proportion das 2te Glied  $= 1$  setze: so ist in  $a:1 = c:d$ ,  $d = \frac{c}{a}$

$=$  dem Quotienten, welcher durch die Division von  $c$  durch  $a$

a in c entsteht. Dividiren heißt daher die vierte Proportionalzahl zu dem Divisor, der Einheit und dem Dividendus finden.

§. 224.

Diese Betrachtung gibt uns nun sehr deutliche Begriffe von dem Produkte und dem Quotienten, nach welchen das Produkt P aus zweien Faktoren A und B eine Zahl ist, in welcher der eine Faktor B eben so enthalten ist, wie die Einheit (1) in dem ersten Faktor A, indem  $1 : A = B : P$ , und der Quotient Q aus  $\frac{S}{R}$  eine Zahl ist, welche

aus dem Dividendus S eben so, wie die Einheit aus dem Divisor entsteht, indem  $R:1 = S:Q$  ist. Diese Begriffe sind bei der Anwendung sowol der gewöhnlichen als allgemeinen Zahlenrechnung auf geometrische Größen von ungemeinem Nutzen, weil sie uns die Uebereinstimmung gewisser geometrischen Operationen mit der Multiplikation und Division in Zahlen deutlich vor Augen stellen. Bevor wir aber dieses weiter entwickeln, wollen wir noch einige Begriffe von der Multiplikation zweier benannten Zahlen etwas auseinandersetzen.

§. 225.

Wenn ich sage: 1 Pfund kostet 4 Groschen,  
also kosten 6 Pf. 24 Gr.; so schließe ich, es mus-  
sich verhalten 1 Pf. : 6 Pf. = 4 Gr. zu der Anzahl  
3 3 Groschen,

## 134 Achtes Kap. Von der Multiplik.

Groschen, welche 6 Pf. kosten. Diese 24 Groschen entstehen also, indem zwei benannte Zahlen, nämlich die Zahl der Groschen 4 und die Zahl der Pfunde 6 in einander multiplicirt werden. Kan ich aber nun wohl sagen, daß 4 Groschen durch 6 Pfund multiplicirt, oder 4 Groschen 6 Pfund mal genommen werden? Wenn bei dieser Multiplikation die Art und Größe der Einheit worauf sich die Zahl 6 beziehet, welche hier ein gewisses Gewicht, 1 Pfund ist, auf das erhaltene Produkt von 24 Gr. wirklich einigen Einfluss hätte; so könnte ich gewis nicht auch in folgenden Aufgaben: 1 Elle kostet 4 Gr. was kosten 6 Ellen; oder 1 Centner kostet 4 Gr. was kosten 6 Centner; oder 1 Schof Äpfel kostet 4 Gr. was kosten 6 Schof Äpfel, beständig dasselbe Produkt von 24 Gr. erhalten, weil alsdann 4 Gr. 6 Ellen mal, oder 4 Gr. 6 Schof Äpfel mal genommen nothwendig etwas anders geben müßten, als 4 Gr. 6 Pfund mal genommen. Dies mus uns sogleich auf die Gedanken bringen, daß die Einheit, worauf sich die Zahl 6 beziehet, gar keinen Einfluss auf das Produkt 24 Gr. haben kan, und in der That hat es mit der Multiplikation zweier benannten Zahlen folgende Bewandnis. Nur der Eine Faktor, in den angegebenen Fällen die 4 Gr., wird wirklich als eine benannte Zahl betrachtet, den man daher den Realfaktor nennen kan; der andere Faktor mus nur als eine ganz allgemeine Zahl angesehen werden, welche durch ihren Werth anzeigt, wie oft die allgemeine Einheit

Einheit (1) in ihr enthalten sei, und also auch der Realfaktor in dem Produkte enthalten sein sol. Ich möchte diesen letztern Faktor den Rationalfaktor nennen, weil er das Verhältniß angibt, worin er selbst gegen die Einheit steht, und worin also auch das Produkt gegen den Realfaktor stehen sol.

Auch in folgender Aufgabe: 1 Rthlr. Kapital gibt  $\frac{1}{100}$  Rthlr. Zinse, was geben 4 Rthlr. Kapital? wo nach der Proportion

$$\begin{aligned} & 1 \text{ Rthlr. Kapital} : 4 \text{ Rthlr. Kapital} \\ & = \frac{1}{100} \text{ Rthlr. Zinse} : \frac{4 \cdot 1}{100} \text{ Rthlr. Zinse,} \end{aligned}$$

die gesuchten Zinsen gefunden werden, indem man 4 Rthlr. Kapital in die  $\frac{1}{100}$  Rthlr. Zinsen multiplicirt, und wo also diese beiden benannten Zahlen sich auf einerlei Einheit, nämlich 1 Rthlr. beziehen, wird doch der eine Rationalfaktor 4 offenbar nur als eine unbenannte Zahl angesehen. Eben so kan ich auch von den beiden benannten Zahlen 2 Sol und 3 Sol gar wol sagen; ich wil 2 Sol 3-mal nehmen, oder auch, ich wil 3 Sol 2 mal nehmen; aber man sollte nie sagen, daß man 3 Sol durch 2 Sol multipliciren wolle: indem 3 Sol 2 Sol mal nehmen, eben so wenig einen schicklichen Sinn haben kan, als 3 Rthlr. 2 Rthlr. mal oder 4 gr. 6 Pf. mal nehmen. Es wird vielmehr auch hier der eine von den beiden Faktoren z. B. 3" als der Realfaktor und der andere 2, als der Rationalfaktor angesehen und in der Proportion:  $1 : 2 = 3" : 6"$  das vierte Glied, als das Produkt von  $2 \cdot 3"$ , gleich  $6"$  gefunden.

## 136 Ahtes Kap. Von der Multiplik.

### §. 226.

Nunmehr werden wir die vorhererwähnte Uebereinstimmung gewisser geometrischen Operationen mit der Multiplikation in Zahlen mit Deutlichkeit übersehen können. Gesezt es wäre (Fig. 9.) eine Linie  $AB = 2''$  und eine andre  $AC = 3''$  gegeben; so kan ich noch eine dritte Linie  $AV$  dergestalt annehmen, daß sich  $AV : AB$  verhält wie  $1 : 2$ , welche  $AV$  in diesem Falle  $= 1''$  zu nehmen ist. Finde ich nun (nach der Num. 42. der geometrischen Sätze gelehrtten Konstruktion) zu diesen drei Linien  $AB$ ,  $AV$ ,  $AC$  die vierte Proportionallinie  $AX$  dergestalt, daß  $AV : AB = AC : AX$  wird; so mus diese Linie  $AX$ , in welcher die  $AC (= 3'')$  eben so oft, als  $AV$  in der  $AB$  (also 2 mal), enthalten ist, ganz offenbar  $= 6''$  gefunden werden. In so ferne nun die Zahl des Maßes dieser  $AX$  gleich ist dem Produkte derer beiden Zahlen, welche das Maß von der  $AB$  und  $AC$  angeben, in so ferne kan ich gar wol sagen, daß diese  $AX$  das Produkt der beiden Linien  $AB$  und  $AC$  sei, und in diesem Verstande kan ich allemal das Produkt zweier gegebenen Linien durch geometrische Konstruktion finden, indem ich zur Linie der Einheit und zu den beiden gegebenen Linien die vierte Proportionallinie finde.

### §. 227.

Die Einheitslinie  $AV$  musste in diesem Falle nur darum gerade  $= 1''$  genommen werden, weil die  $AC = 2''$  gegeben war und also keine andre Größe außer

außer 1" sich zur AC verhält wie 1 : 2. Ich würde aber die AX von derselben Größe = 6" gefunden haben, wenn ich stat AV eine andere Einheitslinie AU (Fig. 9.) von jeder beliebigen Größe, aber auch alsdan stat AB eine andere Linie AB dergestalt angenommen hätte, daß sich wiederum verhielte  $AU : AB = 1 : 2$ . Denn wenn nur das Verhältniß  $AU : AB$  gleich ist dem Verhältnisse  $AV : AB$ ; so wird offenbar ebenso wol in der Proportion  $AU : AB = AC : AX$

als in  $AV : AB = AC : AX$

die AX gleich 6" gefunden werden. So kan ich also z. B. das Produkt  $3 \cdot 4$ " durch geometrische Konstruktion in Linien finden, indem ich eine Einheitslinie AV von beliebiger Größe, und dazu eine andere Linie AC so groß nehme, daß  $1 : 3 = AV : AC$  wird, und in  $AV : AC =$  eine Linie von 4" : AX die vierte Proportionale AX geometrisch bestimme. (\*)

§ 5

§. 228.

(\*) Diese Multiplikation in Linien ist also ganz verschieden von der so genannten Multiplikation der Höhe und Basis bei der Bestimmung eines Flächenraums. Hierbei werden eigentlich ganz und gar keine Linien multiplicirt, und man mus sich darüber folgender Maßen ausdrücken: Die Zahl der Zolle in der Grundlinie multiplicirt in die Zahl der Zolle in der Höhenlinie giebt eine Zahl, welche anzeigt, wie viel Quadratzolle in der Fläche des Parallelogrammes Platz haben. Daß dieses allemal zutreffen müsse, ist bei jedem

## 138 Achtes Kap. Von der Multiplik.

§. 228.

Wenn in den vier Proportionallinien (Fig. 10.)  $AB:AV = AC:AQ$ , das Verhältniß der beiden ersten  $AB:AV$  gleich  $4:1$  ist; so mus, wenn die dritte  $AC = 8''$  angenommen wird, die vierte proportionale  $AQ = 2''$  gefunden werden. Da nun die Zahl  $2''$  der Quotient ist aus  $\frac{8}{4}$ ; so kan ich auch sagen, daß die  $AQ$  als der Quotient der Linien  $\frac{AC}{AB}$  angesehen, und demnach der Quotient

aus jeden zwei gegebenen Linien durch geometrische Ver.

jedem Rechtecke klar, und durch geometrische Vergleichung der Flächenräume anderer Figuren mit dem Rechtecke, ergeben sich alsdenn auch die bekanten Regeln für die Ausmessung anderer Figuren. Durch die Multiplikation zweier Linien kan aber niemals eine Fläche hervorgebracht werden, nicht sowohl deshalb, weil unzählige Linien von 0 Breite zusammen genommen ebenfalls 0 Breite geben müssen; denn was könnte uns hindern stat der mathematischen Linien, körperliche Linien von einiger obwol sehr geringen Breite anzunehmen, wenn wir dadurch zu dieser neuen Vorstellung gelangen könnten: sondern weil unmöglich zwei Faktoren eines Produktes als benahmte Zahlen betrachtet werden können, so daß durch eine gewisse Multiplikation der Nahmen selbst ein neuer Nahme entstehen könnte, welcher gleichsam das Produkt zweier andrer Nahmen wäre.



Verzeichnung gefunden werden kan, indem man zur Linie des Divisors, zur Einheitslinie und zur Linie des Dividendus die vierte Proportionallinie findet.

§. 229.

Vier Proportionallinien  $AB : AC = AD : AF$  mögen nun endlich von so verschiedener Größe sein, als man nur wil; so wird sich doch allemal eine kleine Linie als ein Maß annehmen lassen, aus welchem jede dieser Linien zusammengesetzt werden kan. Wenigstens müssen die Fehler, welche dabei noch gemacht werden, kleiner als das angenommene Maß selbst sein, und da man das Maß nach Belieben klein annehmen kan; so kan auch der Fehler gar bald so gering gemacht werden, daß er sich unsern Augen völlig entzieht. Wenn ich nun die Zahl dieses Maßes in  $AB$ ,  $b$  in  $AC$ ,  $c$  in  $AD$ ,  $d$  in  $AF$ ,  $f$  nehme; so werden auch diese Zahlen ganz nothwendig proportional und  $b : c = d : f$  sein. Daher wird  $f$  (die Zahl der Maße in  $AF$ )  $= \frac{dc}{b}$  sein, und in so fern ich mir jede vier Proportio-

nallinien als vier durch Zahlen auszudrückende Größen vorstellen kan, kan ich auch behaupten, daß der Ausdruck  $\frac{AC \cdot AD}{AB}$  die vierte Proportio-

nallinie zu  $AB : AC = AD$  anzeige, und daß überhaupt alle Lehrsätze von den Proportionen in Zahlen auch auf proportionale Linien angewandt werden können.

§. 240.

## 140 Aechtes Kap. Von der Multiplik.

§. 230.

### LV. Aufgabe.

Die Höhe zu einem Parallelogramm zu finden, wozu die Grundlinie gegeben ist, so daß das Parallelogramm einem andern gleich werde, dessen Grundlinie und Höhe gegeben sind.

§. 231.

### Vorbereitung.

Die Grundlinie des ganz bekanten Parallelograms (Fig. 5.) sei MN, die Höhe desselben QN.

Die gegebne Grundlinie des verlangten Parallelograms AB, die gesuchte Höhe BD.

Man zeichne sich, um die Forderungen der Aufgabe deutlich vor Augen zu haben, außer dem gegebenen Parallelogramm (Fig. 5.) auch ohngefähr das verlangte Parallelogramm (Fig. 6.)

§. 232.

### Auflösung.

Wenn nun das letztere wirklich das verlangte Parallelogramm sein sol; so mus, indem wir uns unter MN, QN, &c. die Zahlen vorstellen, wodurch diese Linien ausgedruckt werden können,

$$MN \cdot QN = AB \cdot BD$$

folglich auch  $\frac{MN \cdot QN}{AB} = BD$  sein.

AB

Diese gefundene Formel läßt sich nun in folgende Proportion auflösen,  $AB : MN = QN : BD$ ,  
moraus

woraus sich ergibt, daß man die verlangte  $BD$  findet, indem man zu den Linien  $AB$ ,  $MN$ ,  $QN$ , die vierte Proportionallinie verzeichnet.

§. 233.

Wir haben ähnliche Aufgaben schon im fünften Kapitel dergestalt aufgelöst, daß wir die Größen der gegebenen Linien durch bestimmte oder allgemeine Zahlen, und dadurch die Forderung der Aufgabe in einer algebraischen Gleichung ausdrückten. Durch die gewöhnliche Auflösung einer solchen Gleichung fanden wir alsdan eine Formel für die Größe der gesuchten Linie, welche darauf nach einer solchen Formel berechnet und in Zahlen gefunden wird. Eine solche Auflösung heißt eine arithmetische oder algebraische Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Wenn man aber aus den gegebenen Linien, ohne dieselbe als Zahlen zu betrachten, bloß vermittlest geometrischer Operationen durch Cirkel und Lineal, nach den Lehrsätzen der Geometrie die gesuchten Linien findet; so hat man die Aufgabe geometrisch aufgelöst. Wir werden zu seiner Zeit einige Beispiele von einer ganz reinen geometrischen Auflösung geben, fürs erste aber die bei dieser Aufgabe gebrauchte Methode ferner in einigen Aufgaben anwenden; so daß wir die gegebenen Größen als Zahlen behandeln, die Forderungen der Aufgabe in algebraischen Gleichungen ausdrücken, und diese Gleichungen bis zu dem simpelsten Ausdruck algebraisch auflösen, und nach dieser Formel

## 142 Achtes Kap. Von der Multiplik.

Formel durch geometrische Operation die gesuchte Anle finden.

§. 234.

### LVI. Aufgabe.

Die Grundlinie eines Parallelogrammes zu finden, dessen Höhe FH sein sol, dergestalt, daß dies Parallelogram 3 mal so groß werde, als ein anderes gegebenes, dessen Grundlinie AB und Höhe BD ist.

§. 235.

### Auflösung.

Da diese 3 gegebenen Linien allemal nach irgend einem Maße gemessen, und also ihre Längen durch Zahlen ausgedruckt werden können, welche sich auf dieses Maß beziehen; so wollen wir setzen, die Zahl der Maße in A B sei  $b$ , in BD sei  $h$ , in FH sei  $a$ . Setzen wir ferner die Zahl der gesuchten Grundlinie sei  $x$ ; so mus nach den Forderungen der Aufgabe  $a x = 3 b h$ ; folglich  $x = \frac{3 b h}{a}$

sein. Wenn wir nun diejenige Linie, in welcher die Zahl der Maße  $\frac{b h}{a}$  ist, L nennen, so werden,

da  $\frac{b h}{a}$  die vierte Proportionalzahl zu  $a, b, h$ , und

daher  $a : b = h : \frac{b h}{a}$  ist, auch die durch diese

Zahlen bestimmten vier Linien proportional, also  
FH

## und Division in Linien. 143

FH : AB = BD : L sein. Man finde also diese vierte Proportionallinie L durch geometrische Zeichnungen, und setze diese Linie 3 mal aneinander, so wird die dadurch bestimmte Linie  $= 3 L = \frac{3 b h}{2} = x$  sein, und die gesuchte Grundlinie angeben.

§. 236.

Für die XXXIX. Aufgabe ist §. 155 die Formel  $x = \frac{3 b h}{2 \beta}$ . Um auch nach dieser Formel,

nicht die Zahl x der gesuchten Linie durch Berechnung, sondern unmittelbar die gesuchte Linie durch geometrische Konstruktion zu bestimmen; so dürfte man nur nach der Proportion  $2 \beta : 3 b = h : L$  die vierte proportionale L geometrisch verzeichnen, indem man stat  $2 \beta$ ,  $3 b$ ,  $h$ , die zu diesen Zahlen gehörigen Linien nimmt, und es müßte die Zahl der Maße in der so bestimmten  $L = \frac{3 b \cdot h}{2 \beta} = x$  sein.

§. 237.

### LVII. Aufgabe.

Es ist ein Quadrat und ein Triangel, und die Grundlinie zu einem andern Triangel gegeben. Welche Höhe mus ich diesem Triangel geben, damit sein Flächenraum anderthalbmal so gros sei, als der Flächenraum des gegebenen Quadrates und Triangels zusammen genommen?

§. 238.

# 144 Aichtes Kap. Von der Multipl. 1c.

§. 238.

Auflösung.

Es sei die Zahl einer Seite des Quadrates  $= q$ ,  
die Zahl der Grundlinie im gegebenen Triangel  $= g$   
die Zahl der Höhenlinie im gegebenen Triangel  $= h$   
die Zahl der gegebenen Grundlinie  $= \beta$   
und der gesuchten Höhe des verlangten Triangels  $= x$ :  
so sol sein

$$\beta x = \frac{1}{2} (q^2 + g h), \text{ durch } 2 \text{ multiplicire}$$

$$\beta x = \frac{1}{2} (q^2 + g h), \text{ durch } \beta \text{ dividire}$$

$$x = \frac{1}{\beta} \left( \frac{q^2}{2} + \frac{g h}{2} \right)$$

Nimt man nun stat dieser Zahlen, die dadurch bezeichneten Linien, so findet man nach der Proportion  $2 \beta : g = h : L$  die Linie  $L = \frac{g h}{2 \beta}$

und nach  $\beta : q = q : l$ , die  $l = \frac{q^2}{\beta}$ . Man setze

nun die beiden Linien  $L$  und  $l$  zusammen; so wird diese Summe dreimal genommen eine Linie  $= 3$ ,  
 $(L + l) = 3 \left( \frac{g h}{2 \beta} + \frac{q^2}{\beta} \right) = x$  geben, und da-

her die gesuchte Höhe bestimmen.

Erster

## Erster Anhang.

---

### Aufgaben ohne Auflösung.

#### I.

Ein Vater hinterläßt drei Söhne und 1500 Rthlr. Nach seinem Testamente sol der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweite, der zweite aber, 100 Rthlr. mehr als der dritte: wie viel bekommt ein jeder?

II. Ein Man sagt: meine Frau ist 30 Jahr älter als meine Tochter, ich bin 22 Jahr älter als meine Frau; unser aller Alter zusammenaddirt gibt 100. Wie alt war der Man, die Frau, die Tochter?

III. Ein Vater sagte: mein ältester Sohn ward geboren, da ich 30 Jahr, mein jüngster, da ich 34 Jahr alt war; ist beträgt mein Alter und das Alter meiner beiden Söhne zusammen genommen 146 Jahr; wie alt war der Vater, wie alt jeder Sohn?

IV. Eine Witwe sol sich mit ihren 2 Söhnen und 3 Töchtern in einer Summe von 11000 Rthlr. vertheilen, daß ein Sohn zweimal mehr bekommt

R

## 146 Erster Anhang.

kömt als eine Tochter, und sie selbst so viel als beide Söhne. Wie viel bekommt ein jedes?

V. Cajus hinterließ ein Testament, in welchem er folgendes verordnet hatte. Meine Frau sol die Hälfte meines ganzen Vermögens haben, mein Bruder gerade so viel, als der dritte Theil des ganzen Vermögens beträgt, und was übrig bleibt sol der Kirche zufallen. Das was der Kirche zufiel betrug gerade 100 Rthlr.; wie groß war das ganze Vermögen?

VI. Ein Vater hinterläßt 4 Söhne, welche sein hinterlassenes Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste nimt 3000 Rthlr. weniger als die Hälfte des Ganzen, der zweite nimt 1000 Rthlr. weniger als  $\frac{1}{3}$  des Ganzen, der dritte nimt genau den vierten Theil des Ganzen, der vierte nimt 600 Rthlr. und den fünften Theil der ganzen Erbschaft: wie groß war die Erbschaft, und wie viel hat ein jeder bekommen?

12000

VII. Die Glocke hat X geschlagen, rief ein Nachtwächter aus. Wie viel hats geschlagen? fragte ihn ein Schwärmer, und jener erwiederte: die Hälfte, das Dritttheil und das Viertheil der Stunden



## Aufgaben ohne Auflösung. 147

Stunden ist um 1 größer als ihre Anzahl. Welches war die Anzahl der Stunden? = 12

VIII. Eine Mühle hat 3 Mühlgänge von verschiedner Größe. In einer Stunde wurden auf dem ersten, 3 Scheffel, auf dem zweiten, 2 Scheffel und auf dem dritten nur anderthalb Scheffel abgemahlen: in wie viel Stunden kan die ganze Mühle 12 Wispel abmahlen? *Aus. in 18 Stunden*

IX. An einem Baue haben täglich gearbeitet 1 Meister, 3 Gesellen, 2 Lehrbursche und 4 Handlanger. Der Meister bekam täglich 16 Gr. ein Geselle 12 Gr. ein Lehrbursche 8 Gr. und ein Handlanger 6 Gr. das ganze Arbeitslohn betrug 92 Rthlr. wie lange hat der Bau gedauert? *Aus. 24 Tage*

X. Man findet den Brief eines feindlichen Officiers, worinnen er schreibt: die Hälfte meines Kommando ist gefangen, der vierte Theil auf dem Plaze geblieben, und der siebente Theil hart verwundet; folglich habe ich nur noch 3 Man bei mir. Wie groß ist sein Kommando gewesen? *Aus. 28 Mann*

XII. Nachdem jemand den dritten und fünften Theil seines mitgebrachten Geldes in einer

## 148 Erster Anhang.

Wette verloren und ausgezahlt hatte, blieben ihm noch 35 Rthlr. übrig. Wie viel Geld hat er bei sich gehabt? *Ant. 75 fl.*

XII. Ein anderer hatte mit dreien Personen gewettet; mit dem ersten um  $\frac{1}{3}$ , mit dem zweiten um  $\frac{1}{4}$  und mit dem dritten um  $\frac{1}{5}$  von allem Gelde, was er bei sich hatte. Nachdem er die beiden ersten Wetten verloren und die dritte gewonnen hatte, hatte er überhaupt 11 Gr. verloren: wie viel Geld hat er bei sich gehabt? *Ant. 29 3/4*

XIII. Alexander sprach zu seinen Generälen: Ich bin 2 Jahr älter als Ephestion; Clytus sagte: ich bin 4 Jahr älter als ihr beide; Calisthenes setzte hinzu: mein Vater ist 96 Jahr alt, und folglich so alt, als ihr alle drei zusammen. Wie alt war ein jeder? *Ant. 24 J. 11. 22 J. 11 50 J*

XIV. Der Fuß einer Säule ist  $5\frac{1}{2}$  Fuß hoch, das darauffstehende Holzwerk beträgt die Hälfte der ganzen Säule, über dem Holze liegt Kupfer, dessen Höhe  $\frac{1}{3}$ , und darüber eine Vergoldung, dessen Höhe  $\frac{1}{4}$  der ganzen Säule ausmacht. Wie hoch war die Säule? *Ant. 35 Lß.*

XV.

## Aufgaben ohne Auflösung. 149

XV. Ein Vater hinterläßt seinen 11 Kindern 3600 Rthlr. mit der Verordnung, daß eine jede Tochter 360 Rthlr. ein jeder Sohn 300 Rthlr. erhalten solle. Bei der Theilung gieng das Vermögen gerade auf; wie viel Söhne und wie viel Töchter waren da? *Ans. Söhne = 5 u. Töchter = 6*

XVI. In einer Stadt liegen Reuter und Infanteristen, zusammen 300 Man. Ein Infanterist bekommt monatlich 5 Rthlr. ein Reuter 8 Rthlr. und der ganze Sold beträgt monatlich 1800 Rthlr. wie viel Reuter und wie viel Infanteristen waren in der Stadt? *Ans. 100 Reuter u. 200 Infanteristen.*

XVII. Zwei Hirten, A und B, hatten ein. *auf S. 83.* jeder eine Heerde Schafe, und fanden, daß wenn A an B 30 Schafe abgeben wolte, beide Heerden gleich groß, daß aber die Heerde des A dreimal so groß als die Heerde des B sein würde, wenn B an A 40 Schafe abgeben müste. Wie viel Schafe hielt eine jede Heerde? *Ans. A 170 Sch. B. 110.*

XVIII. Man weiß, daß 4 Pfund frischer und 3 Pfund gesalzener Lachs zusammen für  $2\frac{1}{2}$  Rthlr. ferner, daß 2 Pfund frischer und 1 Pfund gesalzener

R 3

Lachs

Lachs zusammen für 1 Rthlr. verkauft sind: wie hoch ist ein Pfund frischer, wie hoch ein Pfund gefalzener Lachs angerechnet? *Ans. 194 1/2 Pf. 2 1/2 Rthl.*

XIX. Eine Stadt ist in 3 Theile abgetheilt und sol 900 Rthlr. Kontribution zusammenbringen, dergestalt, daß der zweite Theil zweimal so viel zahlet, als der erste, weniger 17 Rthlr. der dritte Theil  $\frac{2}{3}$  so viel als der erste, und noch 11 Rthlr.

Wie viel mus jeder Theil zusammenbringen?

*Ans. nach 7. Theil bringt 194 1/2 Pf. 2 1/2 Rthl. 3 1/2 Rthl. 4 1/2 Rthl.*

XX. 20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren zusammen 24 Fl. alle Weiber zusammen auch 24 Fl. und man weiß, daß ein Man einen Gulden mehr zahlen mußte, als ein Weib, welches 2 Gulden zahlte: wie viel Männer und wie viel Weiber wären da? *Ans. 12 Männer 8 Weiber.*

XXI. Ich habe 2 und 8 Groschen - Stücke, und es wil jemand von mir 15 Stück Geld haben, welche gerade  $3\frac{1}{2}$  Rthlr. werth sein sollen. Kan ich dis mit meinen beiden Geldsorten möglich machen, und wie viel Stücke mus ich von jeder Sorte dazu geben? *Ans. 9 24 1/2 Pf. 2 1/2 Rthl.*

XXII.

## Aufgaben ohne Auflösung. 151

XXII. Eine Stadt sollte einen Tribut erlegen.

Nachdem jedes Haus 5 Rthlr. gegeben hatte, so

fehlten noch 42 Rthlr. zur verlangten Summe,

Nachdem jedes Haus noch 1 Rthlr. nachgegeben,

also überhaupt 6 Rthlr. gegeben hatte, so blieben

58 Rthlr. übrig: Wie viel Häuser waren in der

Stadt, und wie hoch war der Tribut? *Ans. für Häuser waren 100 u. 1 Rthl. 542*

*Gleich.  $5x + 42 = 6x - 58$*

XXIII. Nachdem von einer Gesellschaft jede

Person 4 Rthlr. gegeben hatte, hatte man 20 Rthlr.

zu wenig um die ganze Beche zu bezahlen, und nach-

dem jeder noch 2 Rthlr. nachgeschossen hatte; so

behielt man nach Bezahlung der Beche noch 30

Rthlr. übrig. Wie viel Personen waren in der

Gesellschaft, und wie hoch belief sich die Beche? *Ans. 25 Pers. u. 120 Rthl.*

XXIV. Zwei Malter Roggen und 8 Malter

Waizen kosten zusammen 64 Rthlr. drei Malter

Roggen und 6 Malter Waizen kosten 54 Rthlr.

Wie viel kostet eine Malter von jedem? *Ans. 1 Mt. Rogg 4 Rthl. u. 1 Mt. Weiz 7 Rthl.*

XXV. Ein Meister hatte mit einem Gesellen

den Kontrakt geschlossen, daß er ihm für jeden Tag,

wo er arbeiten könnte, außer der Kost noch 8 Gr.

geben, für jeden Tag aber, wo er nicht arbeiten

R 4

würde,

würde,  $2\frac{1}{2}$  Gr. für die Kost bezahlt haben wolle. Als der Meister nach Verlauf von 15 Tagen seinem Gefellen 3 Rthlr. ausgezahlt hatte, so sagte dieser zu seinem Freunde, daß der Meister ihm um 8 Gr. zu wenig gegeben hätte; denn wenn er gleich nicht mehr wisse, wie viel Tage er eigentlich gearbeitet, so habe er doch immer von einem Tage zum andern in Gedanken behalten, wie viel ihm der Meister noch schuldig sei. Wie viel Tage hatte der Gefelle gearbeitet?

XXVI. Unter mehreren Personen ist ein Ring versteckt: man sol durch eine künstliche Rechnung finden, bei welcher Person, an welchem Finger und Gliede sich der Ring befindet.

Nachdem man eine beliebige Ordnung bestimmt hat, nach welcher die Personen, Finger und Glieder gezählt werden; so lasse man mit diesen Zahlen ohngefähr solche Veränderungen machen, wie in der XXV. Aufgabe pag. 82. bis man sich die Zahl, welche nach diesen Veränderungen herauskömmt, angeben läßt, um davon auf die anfangs gesetzten Zahlen zu schließen.



**Zweite**

**Zweite Abtheilung**

**zum Gebrauch**

**der**

**Zweiten Klasse.**

2010-10-12 1:13:12

10-10-12

101

2010-10-12 1:13:12

101



## Neuntes Kapitel.

### Von der Multiplikation und Division positiver und negativer Größen.

§. 239.

Da man durch die algebraischen Zahlen, außer den Größen der Dinge auch gewisse Beziehungen, worinnen einige Dinge gegen einander stehen, durch die Zeichen  $+$  und  $-$  auszudrücken pflegt; so entsteht bei der algebraischen Multiplikation und Division die Frage, was für ein Zeichen dem Produkte oder dem Quotienten zukömmt, wenn positive und negative, oder negative und negative Größen ic. in einander multiplicirt oder dividirt werden. Wir haben uns zwar bisher willig finden lassen, auch ohne Beweis zu glauben, nicht nur, daß z. B.  $+ 2 \cdot + 3 = + 6$  und überhaupt  $+ a \cdot + b = + a b$  sei; sondern auch, daß z. B.  $+ 2 \cdot - 3$  (das ist  $- 3$  zweimal genommen)  $= - 6$  sei; nunmehr aber wird es nöthig sein, uns allgemein von folgendem Lehrsatze zu überzeugen.

§. 240.

L e h r s a t z.

I. Zwei Faktoren von verschiedenen Zeichen geben ein negatives.

II. Zwei

## 156 Neuntes Kap. Von der Multipl.

### II. Zwei Faktoren von einerlei Zeichen ein positives Produkt.

§. 241.

Lehrsatz.

Daß zwei positive Faktoren ein positives Produkt geben, ist durch sich selbst klar. Dies vorausgesetzt, muß

1) Da  $6 - 4 = 2$ , nothwendig  $3(6 - 4) = 6$ , oder unverwickelt multiplicirt, 18 und  $+ 3 \cdot - 4$  zusammengenommen  $= 6$  sein. Wenn aber dies sein soll: so muß nothwendig  $4 \cdot 3 \cdot - 4 = - 12$  sein; indem keine andere Zahl außer  $- 12$  mit 18 zusammengenommen 6 giebt.

2) Wolte man ferner gerne das Resultat haben, daß  $- 3 \cdot + 4 = - 12$  sei; so kan man folgendermaßen schließen: Es muß sein  $+ 4 \cdot (+ 6 - 3) = + 12$ , oder  $+ 24$  und  $4 \cdot - 3 = 12$ ; also muß  $4 \cdot - 3 = - 12$  sein; indem keine andre Zahl, außer  $- 12$ , mit  $+ 24$  zusammengenommen  $+ 12$  giebt.  $+ 4 \cdot - 3$  ist aber nun offenbar einerlei mit  $- 3 \cdot + 4$ . Aus 1) und 2) ergiebt sich also, daß sowohl  $+ 3 \cdot - 4$ , als  $- 3 \cdot + 4$ ,  $= 12$  giebt, und hiermit ist der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen, daß nämlich eine positive Zahl durch eine negative, oder eine negative Zahl durch eine positive multiplicirt ein negatives Produkt giebt.

Durch Hülfe dieses Satzes wird es nun leicht sein, auch den zweiten Theil des Lehrsatzes zu erweisen,  
sen,

## II. Division positiv. u. negativ. 2c. 157

sen, daß nämlich nicht nur 3) zwei positive Factoren, welches von selbst klar ist; sondern auch 4) zwei negative Factoren ein positives Product geben.

Es ist  $+6 - 2 = +4$ . Da nun, wie eben erwiesen worden,  $-3 \cdot +4 = -12$ ; so mus auch  $-3 \cdot (+6 - 2) = -12$  oder unvermiffelt multiplicirt,  $-18$  mit  $-3 \cdot -2$  zusammengekommen  $= -12$  sein; welches nicht wahr sein kan, wenn nicht  $-2 \cdot +3 = +6$  ist; indem keine andre Zahl außer  $+6$  mit  $-18$  zusammengekommen  $-12$  geben kan.

### §. 242.

Aus diesem Lehrsatze können nun auch die nöthigen Regeln für die Division der positiven und negativen Größen gar leicht gefolgert werden, wenn man nur voraussetzt, daß eben so, wie bei der gewöhnlichen Division, wobei man blos auf die absolute Größe der Zahlen siehet, die Division der Multiplikation geradezu entgegengesetzt ist, so daß  $\frac{2 \cdot 3}{3} = 2$  ist, und überhaupt eine jede Zahl

unverändert herauskömmt, nachdem sie durch einerlei Zahl multiplicirt und dividirt ist; eben so auch die algebraische Division, wobei auch die Beschaffenheiten der Größen, die Zeichen  $+$  und  $-$  in Betrachtung kommen, der algebraischen Multiplikation geradezu entgegengesetzt ist, so daß, wenn eine Größe A durch eine andre B multiplicirt, und dies Product durch dieselbe B dividirt ist, der entstandene

## 158 Fünftes Kap. Von der Multipl.

der Quotient sowohl seiner Größe als Beschaffenheit nach der A vollkommen gleich sein mus, wie auch diese Zahlen immer beschaffen sein mögen.

§. 243.

L e b r s a z.

I) Zwei Zahlen mit gleichen Zeichen in einander dividirt, geben einen positiven;  
II) zwei Zahlen mit ungleichen Zeichen in einander dividirt, einen negativen Quotient.

§. 244.

B e w e i s.

Wenn, wie eben erwiesen worden,

1)  $+3 \cdot -4 = -12$  ist, so mus auch  
(§. 55.)  $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = \frac{-12}{-4}$  sein. Da nun nach

(§. 242.)  $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = +3$  sein mus; so mus

(§. 43.)  $\frac{-12}{-4} = +3$  sein.

Da es 2) durch sich selbst klar ist, daß  $\frac{+12}{+4} = +3$ ;

so ist hiemit der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Q. E. D.

## II. Division positiv. u. negativ. 2c. 159

Von den beiden Fällen des 2ten Theiles können wir uns auf folgende Weise überzeugen.

3) Da (§. 240.)  $— 8. — 4 = + 32$ ; so muß auch (§. 55.)  $— 8. — 4 = + 32$  sein; folglich

$$\text{da (§. 242.) } \frac{— 4}{— 8. — 4} = \frac{— 4}{— 8} \text{ ist,}$$

$$\text{auch (§. 45.) } \frac{+ 32}{— 4} = — 8 \text{ sein.}$$

4) Da ferner  $+ 8. — 3 = — 24$ ; so muß (§. 55.)  $+ 8. — 3 = — 24$ , folglich,

$$\text{da (§. 242.) } \frac{+ 8. — 3}{+ 8} = — 3$$

$$\text{auch } \frac{— 24}{+ 8} = — 3 \text{ sein.}$$

### §. 245.

Es ist demnach  $a. — b = — ab$ ,  $— a. + b = — ab$ ,  $— a. — b = ab$ , und  $— 1. + a = — a$ ,  $— 1. + 1 = — 1$ ,  $— 1. — 1 = 1$ .

$$\frac{— 1}{— 1} = 1, \frac{+ 1}{— 1} = — 1, \frac{+ a}{— a} = \frac{— a}{+ a} = — 1,$$

$$\frac{+ p}{— q} = \frac{— p}{+ q}, \frac{— fg}{— m} = \frac{+ fg}{m} = \frac{+ fg}{+ m} \text{ Umgekehrt}$$

kan man stat  $— \frac{p}{q}$  schreiben  $\frac{+ p}{— q}$  oder auch  $\frac{— p}{+ q}$ ,

je nachdem es jedesmal am bequemsten ist.

### §. 246.

## 160 Neuntes Kap. Von der Multipl.

§. 246.

In  $-(a + b - f)$  und jedem ähnlichen Ausdrücke, zeigt das Zeichen  $-$  vor der Parenthese an, daß die ganze eingeschlossene Reihe von einer andern abgezogen werden sol. Folglich mus das Zeichen eines jeden Gliedes in das entgegengesetzte verwandelt werden, wenn man die Parenthese wegschaffen wil, und es ist  $-(a + b - f) = -a - b + f$ ; da nun nach §. 245. auch  $-1(-a + b - f)$ , wenn man unverwickelt multiplicirt,  $a - b + f$  geben mus, so kan man sich auch allemal vorstellen, daß z. B.  $-(q - x - y)$  so viel sei, als  $-1 \cdot (q - x - y)$  so wie  $+(q - x - y) = +1 \cdot (q - x - y)$  ist. Diese Vorstellung sichert uns vor allen Fehlern beim Gebrauch der Parenthesen, wenn wir nur noch merken, daß das Zeichen  $+$  vor dem ersten Gliede einer Parenthese eben so, wie vor dem ersten Gliede in der Seite einer Gleichung, nicht ausdrücklich geschrieben und also allemal verstanden wird; wenn das erste Glied gar kein Zeichen hat. Wolte man daher folgende Reihe  $-m + fg - r$ , nur irgend einer Bequemlichkeit wegen in eine Parenthese setzen, ohne die Veränderung der Zeichen zur Absicht zu haben; so müste die Klammer vor dem  $-$  Zeichen auf folgende Weise  $(-m + fg - r)$ , nicht aber hinter dasselbe, wie in  $-(m + fg - r)$  geschrieben werden; indem dieser letzte Ausdruck  $= -m - fg + r$  sein würde.

§. 247.

## II. Division positiv. u. negativ. 161

§. 247.

In solchen Zahlen, welche in Gestalt der Brüche geschrieben sind, vertritt der Querstrich, welcher die Division anzeigt, die Stelle der Parenthesen. Es ist demnach

$$\frac{p - q + r}{-n + f - g} = (\S. 243.) \frac{-(p - q + r)}{+(-n + f - g)}$$

$$= \frac{-1(p - q + r)}{+1(-n + f - g)} = \frac{-p + q - r}{-n + f - g}$$

oder auch  $-\frac{p - q + r}{-n + f - g} = (\S. 243.) \frac{+(p - q + r)}{-(-n + f - g)}$

$$= \frac{+1.(p - q + r)}{-1.(-n + f - g)} = \frac{p - q + r}{n - f + g}$$

§. 248.

### LVII. Aufgabe.

Zwei Faktoren von mehreren Gliedern, als  $(a - 3f + p^2) \cdot (2a + 3f - g - mn)$  unverändert in einander zu multipliciren.

§. 249. Auflösung.

Man schreibe den einen Faktor unter dem andern auf folgende Weise

$$2a + 3f - g - mn$$

$a - 3f + p^2$  und multiplicire jedes Glied der obern Reihe

durch  $a$ ;  $2a + 3af - ag - amn$ ,

durch  $-3f$ ;  $-6af - 9f^2 + 3fg + 3mnf$

durch  $p^2$   $+ 2ap^2 + 3fp^2 - gp^2 - mnp^2$

Die





## Neuntes Kapitel.

### Von der Multiplikation und Division positiver und negativer Größen.

§. 239.

Da man durch die algebraischen Zahlen, außer den Größen der Dinge auch gewisse Beziehungen, worinnen einige Dinge gegen einander stehen, durch die Zeichen  $+$  und  $-$  auszudrücken pflegt; so entsteht bei der algebraischen Multiplikation und Division die Frage, was für ein Zeichen dem Produkte oder dem Quotienten zukommt, wenn positive und negative, oder negative und negative Größen ic. in einander multiplicirt oder dividirt werden. Wir haben uns zwar bisher willig finden lassen, auch ohne Beweis zu glauben, nicht nur, daß z. B.  $+ 2 \cdot + 3 = + 6$  und überhaupt  $+ a \cdot + b = + a b$  sei; sondern auch, daß z. B.  $+ 2 \cdot - 3$  (das ist  $- 3$  zweimal genommen)  $= - 6$  sei: nunmehr aber wird es nöthig sein, uns allgemein von folgendem Lehrsatz zu überzeugen.

§. 240.

Lehrsatz.

I. Zwei Faktoren von verschiedenen Zeichen geben ein negatives.

II. Zwei

## 156 Neuntes Kap. Von der Multipl.

### II. Zwei Faktoren von einerlei Zeichen ein positives Produkt.

§. 241.

#### Lehrsatz.

Daß zwei positive Faktoren ein positives Produkt geben, ist durch sich selbst klar. Dies vorausgesetzt, mus

1) da  $6 - 4 = 2$ , nothwendig  $3(6 - 4) = 6$ , oder unverwickelt multiplicirt, 18 und  $+ 3 \cdot - 4$  zusammengenommen  $= 6$  sein. Wenn aber dies sein sol: so mus nothwendig  $+ 3 \cdot - 4 = - 12$  sein; indem keine andere Zahl außer  $- 12$  mit 18 zusammengenommen 6 giebt.

2) Wölte man ferner gerne das Resultat haben, daß  $- 3 \cdot + 4 = - 12$  sei; so kan man folgendermaßen schließen: Es mus sein  $+ 4 \cdot (+ 6 - 3) = + 12$ , oder  $+ 24$  und  $4 \cdot - 3 = 12$ ; also mus  $4 \cdot - 3 = - 12$  sein; indem keine andre Zahl, außer  $- 12$ , mit  $+ 24$  zusammengenommen  $+ 12$  giebt.  $+ 4 \cdot - 3$  ist aber nun offenbar einerlei mit  $- 3 \cdot + 4$ . Aus 1) und 2) ergiebt sich also, daß sowohl  $+ 3 \cdot - 4$ , als  $- 3 \cdot + 4$ ,  $= 12$  giebt, und hiermit ist der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen, daß nämlich eine positive Zahl durch eine negative, oder eine negative Zahl durch eine positive multiplicirt ein negatives Produkt giebt.

Durch Hülfe dieses Satzes wird es nun leicht sein, auch den zweiten Theil des Lehrsatzes zu erweisen,  
sen,

## II. Division positiv. u. negativ. 2c. 157

sen, daß nämlich nicht nur 3) zwei positive Faktoren, welches von selbst klar ist; sondern auch 4) zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben.

Es ist  $+6 - 2 = +4$ . Da nun, wie eben erwiesen worden,  $-3 \cdot +4 = -12$ ; so muß auch  $-3 \cdot (+6 - 2) = -12$  oder unverwickelt multiplicirt,  $-18$  mit  $-3 \cdot -2$  zusammengekommen  $= -12$  sein; welches nicht wahr sein kan, wenn nicht  $-2 \cdot +3 = +6$  ist; indem keine andre Zahl außer  $+6$  mit  $-18$  zusammengekommen  $= -12$  geben kan.

### §. 242.

Aus diesem Lehrsatz können nun auch die nöthigen Regeln für die Division der positiven und negativen Größen gar leicht gefolgert werden, wenn man nur voraussetzt, daß eben so, wie bei der gewöhnlichen Division, wobei man blos auf die absolute Größe der Zahlen siehet, die Division der Multiplikation geradezu entgegengesetzt ist, so daß  $\frac{2 \cdot 3}{3} = 2$  ist, und überhaupt eine jede Zahl

unverändert herauskömmt, nachdem sie durch einerlei Zahl multiplicirt und dividirt ist; eben so auch die algebraische Division, wobei auch die Beschaffenheiten der Größen, die Zeichen  $+$  und  $-$  in Betrachtung kommen, der algebraischen Multiplikation geradezu entgegengesetzt ist, so daß, wenn eine Größe A durch eine andre B multiplicirt, und dies Produkt durch dieselbe B dividirt ist, der entstandene

## 158 Neuntes Kap. Von der Multipl.

der Quotient sowohl seiner Größe als Beschaffenheit nach der A vollkommen gleich sein mus, wie auch diese Zahlen immer beschaffen sein mögen.

§. 243.

L e b r s a z.

I) Zwei Zahlen mit gleichen Zeichen in einander dividirt, geben einen positiven;  
II) zwei Zahlen mit ungleichen Zeichen in einander dividirt, einen negativen Quotient.

§. 244.

B e w e i s.

Wenn, wie eben erwiesen worden,

1)  $+3 \cdot -4 = -12$  ist, so mus auch  
(§. 55.)  $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = \frac{-12}{-4}$  sein. Da nun nach

(§. 242.)  $\frac{+3 \cdot -4}{-4} = +3$  sein mus; so mus

(§. 43.)  $\frac{-12}{-4} = +3$  sein.

Da es 2) durch sich selbst klar ist, daß  $\frac{+12}{+4} = +3$ ;

so ist hiemit der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Q. E. D.

## II. Division positiv. u. negativ. 2c. 159

Von den beiden Fällen des 2ten Theiles können wir uns auf folgende Weise überzeugen.

3) Da (§. 240.)  $-8. -4 = +32$ ; so muß auch (§. 55.)  $-8. -4 = +32$  sein; folglich

$$\text{da } (\S. 242.) \frac{-8. -4}{-4} = -8 \text{ ist,}$$

$$\text{auch } (\S. 45) \frac{+32}{-4} = -8 \text{ sein.}$$

4) Da ferner  $+8. -3 = -24$ ; so muß (§. 55.)  $+8. -3 = -24$ , folglich,

$$\text{da } (\S. 242.) \frac{+8. -3}{+8} = -3$$

$$\text{auch } \frac{-24}{+8} = -3 \text{ sein.}$$

### §. 245.

Es ist demnach  $a. -b = -ab$ ,  $-a. +b = -ab$ ,  $-a. -b = ab$ , und  $-1. +a = -a$ ,  $-1. +1 = -1$ ,  $-1. -1 = 1$ .

$$\frac{-1}{-1} = 1, \frac{+1}{-1} = -1, \frac{+a}{-a} = -1, \frac{-a}{+a} = -1,$$

$$\frac{+p}{-q} = -\frac{p}{q}, \frac{-fg}{-m} = +\frac{fg}{m} = +\frac{fg}{+m}.$$

Umgekehrt kan man stat  $-\frac{p}{q}$  schreiben  $+\frac{p}{-q}$  oder auch  $-\frac{p}{+q}$ ,

je nachdem es jedesmal am bequemsten ist.

### §. 246.

## 160 Neuntes Kap. Von der Multipl.

§. 246.

In  $-(a + b - f)$  und jedem ähnlichen Ausdrücke, zeigt das Zeichen  $-$  vor der Parenthese an, daß die ganze eingeschlossene Reihe von einer andern abgezogen werden sol. Folglich mus das Zeichen eines jeden Gliedes in das entgegengesetzte verwandelt werden, wenn man die Parenthese wegschaffen wil, und es ist  $-(a + b - f) = -a - b + f$ ; da nun nach §. 245. auch  $-1(-a + b - f)$ , wenn man unverwickelt multiplicirt,  $a - b + f$  geben mus, so kan man sich auch allemal vorstellen, daß z. B.  $-(q - x - y)$  so viel sei, als  $-1 \cdot (q - x - y)$  so wie  $+(q - x - y) = +1 \cdot (q - x - y)$  ist. Diese Vorstellung sichert uns vor allen Fehlern beim Gebrauch der Parenthesen, wenn wir nur noch merken, daß das Zeichen  $+$  vor dem ersten Gliede einer Parenthese eben so, wie vor dem ersten Gliede in der Seite einer Gleichung, nicht ausdrücklich geschrieben und also allemal verstanden wird; wenn das erste Glied gar kein Zeichen hat. Wolte man daher folgende Reihe  $-m + fg - r$ , nur irgend einer Bequemlichkeit wegen in eine Parenthese setzen, ohne die Veränderung der Zeichen zur Absicht zu haben; so müste die Klammer vor dem  $-$  Zeichen auf folgende Weise  $(-m + fg - r)$ , nicht aber hinter dasselbe, wie in  $-(m + fg - r)$  geschrieben werden; indem dieser letzte Ausdruck  $= -m - fg + r$  sein würde.

§. 247.

## II. Division positiv. u. negativ. 161

§. 247.

In solchen Zahlen, welche in Gestalt der Brüche geschrieben sind, vertritt der Querstrich, welcher die Division anzeigt, die Stelle der Parenthesen. Es ist demnach

$$\frac{p - q + r}{-n + f - g} = (\S. 243.) \frac{-(p - q + r)}{+(-n + f - g)}$$

$$= \frac{-1(p - q + r)}{+1(-n + f - g)} = \frac{-p + q - r}{-n + f - g}$$

oder auch  $-\frac{p - q + r}{-n + f - g} = (\S. 243.) \frac{+(p - q + r)}{-(-n + f - g)}$

$$= \frac{+1(p - q + r)}{-1(-n + f - g)} = \frac{p - q + r}{n - f + g}$$

§. 248.

### LVII. Aufgabe.

Zwei Faktoren von mehreren Gliedern, als  $(a - 3f + p^2) \cdot (2a + 3f - g - mn)$  unverkürzt in einander zu multipliciren.

§. 249. Auflösung.

Man schreibe den einen Faktor unter dem andern auf folgende Weise

$$2a + 3f - g - mn$$

$a - 3f + p^2$  und multiplicire jedes Glied  
der obern Reihe

durch  $a$ ;  $2a + 3af - ag - amn$ ,

durch  $-3f$ ;  $-6af - 9f^2 + 3fg + 3mnf$

durch  $p^2$   $+ 2ap^2 + 3fp^2 - gp^2 - mnp^2$

Die

## 162 Neuntes Kap. Von Multiplikation.

Die Summe aller dieser Glieder ist das verlangte Produkt, welches man so kurz als möglich zu schreiben sucht. Es lassen sich indessen hier nur zwei Glieder, nämlich  $+3af - 6af$  in eines  $-3af$  zusammenziehen. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens können wir uns auf folgende Weise überzeugen.

§. 250.

Beweis.

Es muß gewis  $a \cdot (2a + 3f - g - mn) - 3f \cdot (2a + 3f - g - mn) + p^2 \cdot (2a + 3f - g - mn) = (a - 3f + p^2) \cdot (2a + 3f - g - mn)$  sein: denn die Glieder eines jeden Faktors sind so viel Theile, in welche der ganze Faktor zerlegt ist. Wenn ich aber eine Zahl B z. B. in 3 Theile zerlege, und durch jeden dieser Theile eine andre Zahl A (welche wiederum in mehrere Glieder zertheilt sein kan) multiplicire, so muß die Summe dieser drei Produkte nothwendig dem Produkte A . B gleich sein.

§. 251.

So wird also auch in

$$\begin{array}{rcl} & a + b & \\ & a - b & \\ \hline a(a+b) & = & a^2 + ab \\ -b(a+b) & = & -ab - b^2, \text{ daher die} \\ \hline \text{Summe} & a^2 - b^2 & = (a+b) \cdot (a-b) \\ \text{gefunden werden.} & & \end{array}$$

Zehntes



## Zehntes Kapitel.

### Von den Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 252.

#### LVIII. Aufgabe.

Das Binomium, (die zweinamige, zweigliedrige, zweitheilige Größe)  $a + b$  zu quadriren.

§. 253.

#### Auflösung.

Das Quadrat von  $a + b$ , oder  $(a + b)^2$  ist (nach §. 160)  $= (a + b) \cdot (a + b)$  diese beide Factoren unverwickelt multiplicirt

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \end{array}$$

geben  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

§. 254.

Eben so wird

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \end{array}$$

gefunden  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

§. 2

§. 255.

## §. 255.

Hieraus ersieht man, daß ein Binomial-Quadrat, d. i. das Quadrat einer zweigliedrigen (zweitheiligen) Wurzel enthält

- 1)  $a^2$ , das Quadrat des ersten Wurzeltheiles,
- 2)  $2ab$ , das doppelte Produkt aus beiden Wurzeltheilen,
- 3)  $b^2$ , das Quadrat des letzten Wurzeltheiles.

## §. 256.

Man kan diesen Satz durch eine geometrische Figur sehr gut erläutern. In dem Quadrate Fig. 10. stelle die Seite AC eine zweigliedrige Größe  $a + b$  vor, so mus das ganze Quadrat  $AC^2$  ( $= (a + b)^2$ ) enthalten  $a^2 + ab + ab + b^2$ ; welches, wie beim ersten Anblis der Figur in die Augen fällt, vollkommen zutrifft.

## §. 257.

Um auch folgenden Satz, daß  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , auf ähnliche Art zu erläutern; so setze man (Fig. 11.)  $AC = a$ ,  $BC = b$ , so wird  $AB = a - b$ , und das Quadrat  $ABHJ = (a - b)^2$ . Nun ist  $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$

und  $AHIB = AGEC - HGED - BIDC$ .

Daß die durch die drei ersten vertikal gesetzten Gleichungszeichen ( $||$ ) behaupteten Vergleichen richtig sind, fällt von selbst in die Augen. Wie werden

## Quadratzahlen: Quadranten. 185

werden aber ohne Schwierigkeit einsehen, daß auch die letzte Vergleichung, nämlich  $(-a b + b^2) = BDC$  allerdings richtig ist. Denn

$$\begin{aligned} \text{da } a b &= BFEC, \text{ das} \\ \text{ist } a b &= BDC + IFED; \text{ so ist auch} \\ -a b &= -BDC - IFED, \text{ folglich} \\ \text{da } +b^2 &= +IFED. \end{aligned}$$

$$\text{auch } -ab + b^2 = -BDC.$$

§. 258.

Nach diesem Ausdrucke  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  kan man eine jede Zahl quadriren, indem man dieselbe in zwei andere bequeme Zahlen zertheilt, welches nicht nur öfters viel bequemer als die ordentliche Multiplikation ist; sondern auch auf die gewöhnliche

der Quadratwurzel führt.  
Um z. B.  $\sqrt{169}$  zu finden, theile man diese in 10 und 9, so daß  $a = 10, b = 9$ ,  
so erhält man  $100 + 60 + 9 = 169$ .  
Eben so ist  $15^2 = 100 + 2 \cdot 50 + 25 = 225$   
und  $17^2 = (12 + 5)^2 = 144 + 120 + 25 = 289$ .

In andern Fällen rechnet man bequemer nach  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , und findet z. B.  
 $(79)^2 = (80-1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6561$ .

§. 259.

Auch das Quadrat einer Reihe von mehr als zweien Gliedern z. B.  $(a+b+c)^2$  wird ohne Schwierigkeit gefunden, indem man eine solche

## 166 Zehntes Kapitel. Von den:

Zahl nach der §. 249 gezeigten Art durch sich selbst multiplicirt, und man findet auf diese Weise

$$\begin{array}{r}
 a + b + c \\
 a + b + c \\
 \hline
 a^2 + ab + ac \\
 + ba + b^2 + bc \\
 + ac + bc + c^2 \text{ das Produkt} \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = (a+b+c)^2.
 \end{array}$$

§. 260.

Indessen wird man auf eine weit leichtere Weise das Quadrat einer mehrgliedrigen Zahl angeben können, wenn man eine solche Zahl nach und nach als eine zweigliedrige Zahl betrachtet, und nach den §. 255 gegebenen Regeln quadriert.

Wir wollen dies Verfahren sogleich an der viergliedrigen Reihe  $a + b + c + d$  lernen. Man quadriert nämlich zunächst die beiden ersten Glieder  $a + b$ , und nach §. 255 ist  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Geht man nun zum dritten Gliede  $c$  fort, und betrachtet dies Glied  $c$  als den 2ten Theil, und die beiden ersten Glieder  $(a + b)$  zusammengenommen als den ersten Theil einer zweinamigen Wurzel; so muß in dem Binomialquadrato  $((a + b) + c)^2$  enthalten seyn: 1) das Quadrat des ersten Theiles  $(a + b)^2$  welches nun schon geschrieben steht; 2) das doppelte Produkt aus beiden Theilen  $2c(a + b)$  oder  $2ac + 2bc$ ; 3) das Quadrat des letzten Theiles  $c^2$ . Demnach ist:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

Be-

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 167

Betrachtet man nun ferner die drei ersten Glieder  $(a + b + c)$  zusammengekommen als einen ersten, und das vierte Glied  $d$  als den zweiten Wurzeltheil; so mus  $((a + b + c) + d)^2$  enthalten: 1) das Quadrat des ersten Wurzeltheiles,  $(a + b + c)^2$ , welches schon ausgeschrieben ist; 2) das doppelte Produkt aus beiden Wurzeltheilen  $2d(a + b + c) = 2ad + 2bd + 2cd$ ; 3) das Quadrat des letzten Theiles,  $d^2$ , und es ergibt sich also aus diesen drei Theilen zusammengekommen  $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$ .

§. 261.

Das Quadrat einer jeden bestimmten Zahl läßt sich, wie schon gesagt ist, allemal finden, indem man eine solche Zahl durch sich selbst multiplicirt. So findet man z. B.

$$\begin{array}{r} 435 \\ 435 \\ \hline 2175 \\ 1305 \\ \hline 1740 \end{array}$$

Das Produkt  $189225 = (435)^2$ . Weit schwieriger ist es aber umgekehrt aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, das ist, diejenige Zahl zu finden, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebne Zahl herausbringt. Folgende Betrachtungen werden uns indessen die Mittel an die Hand geben,

## 168 Zehntes Kapitel. Von den

geben, wodurch man allemal mit der möglichsten Vollkommenheit eine solche Wurzel entwickeln kann.

§. 262.

Gesezt es sei die Zahl 189225 gegeben, aus welcher die Quadratwurzel zu ziehen ist. Man theile zuvörderst die gegebne Zahl in Klassen zu zwei und zwei Decimalstellen 18|92|25 dergestalt, daß die Einer und Zehner die erste, die Hunderte und Tausende die zweite, u. s. w. allemal zwei Decimalstellen eine Klasse ausmachen, und also für die letzte höchste Klasse nur Eine Zahl übrig bleibt, wenn die Anzahl der Decimalstellen ungerade ist: so ist nun dies gewis, daß die Wurzel dieser Zahl gerade so viele Decimalstellen haben mus, als diese Zahl Klassen hat. Denn die höchste Zahl von Einer Decimalstelle, die Zahl 9 giebt quadriert 81, eine Zahl von Einer Klasse; und schon die geringste Zahl von 2 Klassen, welches die Zahl 100 ist, hat eine Zahl von 2 Decimalstellen, nämlich 10 zur Wurzel. Ferner giebt 99, die höchste Zahl von 2 Decimalstellen, quadriert 98|01|, eine Zahl von 2 Klassen, und die kleinste Zahl von drei Klassen, nämlich 1|00|00| hat schon eine Zahl von 3 Decimalstellen, nämlich 100 zur Wurzel, &c.

§. 263.

Die Wurzel unserer Zahl 18|92|25| besteht demnach aus drei Decimalstellen, also aus Einern, Zehnern

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 169

Zehnern und Hunderten. Man setze die Zahl der Hunderte, welche in der Wurzel sein mus  $= h$ , die Zahl der Zehner  $= z$ , und die Zahl Einer  $= e$ , dergestalt, daß  $h + z + e$  unsere verlangte noch unbekannte Wurzel ausdrückt, und also

$h + z + e = \sqrt{189225}$  ist; so mus auch (§. 161.)  $(h + z + e)^2 = 189225$  sein.

Wird nun diese dreigliedrige Zahl,  $h + z + e$ , nach (§. 259.) wirklich quadriert; so erhält man

$$h^2 + 2hz + z^2 + 2he + 2ze + e^2 = 189225,$$

oder (\*)  $h^2 + 2hz + z^2 + 2(h+z)e + e^2 = 189225.$

Da ein jedes Produkt aus 2 reinen Hundertszahlen, das ist, solchen Hundertszahlen, welche keine Zehner und Einer bei sich haben, z. B. von 400.400 das Produkt 160000, oder von 300.300 das Produkt 90000 unmöglich Einer, Zehner, Hunderte oder Tausende enthalten kan, folglich allemal vier 0000 in den vier ersten Decimalstellen haben mus; so wird, was auch die Hundertzahl  $h$  für eine Zahl von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bedeuten mag, doch das Produkt  $h h$  in den letzten vier Decimalstellen 0000 haben.

Es kan also keine Zahl von  $h$ , dem Quadrate des ersten Wurzeltheiles niedriger, als in den Zahlen der 3ten Klasse 18|.|. enthalten sein,  
 4 5 -

(\*) Indem die beiden gemeinschaftlichen Faktoren herausgezogen, und stat  $2 h e + 2 z e$  geschrieben werden kan  $2 e (h + z)$  oder auch  $2 (h + z) e$ .

# 170 Zehntes Kapitel. Von den

sein, und um diesen ersten Wurzeltheil  $h$  zu entdecken, darf man nur von den

Quadraten 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

das größte Quadrat auffuchen, welches nur noch in 18 enthalten sein kan. Dies ist in unserm Falle die Quadratzahl 16, und wir sind nunmehr gewis, daß  $h^2 = 160000$  folglich  $h = 400$  ist. Wenn wir nun

$$\text{von } 18 \overline{) 9225} \begin{array}{|c|} \hline h; \\ \hline 4 \dots \\ \hline \end{array} \text{ abzie-}$$

hen  $h^2 = 16 \overline{) \dots}$  so bleibt noch

$$\text{übrig } 2 \overline{) 9225} = 2hz + z^2 + 2(h+z)e + e^2$$

In diesem Reste ist also außer andern Produkten auch das Produkt  $2hz$  enthalten, welches als ein Produkt aus einer reinen Hundertzahl und einem Zehner nothwendig in den 3 ersten Decimalstellen 000 haben mus; so daß keine wirkliche Zahl dieses Produktes in keiner niedrigeren Decimalstelle, als in der vierten stehen kan, und also alle Zahlen desselben in den Zahlen  $2 \overline{) 9} \dots$  enthalten sein müssen. Von diesem Produkte  $2hz$  ist mir nun schon  $h$  bekannt, welches  $= 4$  ist, so daß ich die  $z$  finden kan, indem ich versuche, wie oft  $2h$ , das ist, 2.4, das ist 8, in 29 enthalten ist, nämlich 3 mal. Hiedurch bin ich versichert, daß die Zahl  $z$  nicht größer als 3 sein kan, und wirklich  $= 3$  sein mus; wenn, nachdem ich

von



# Quadratzahlen u. Quadratwurz. 171

1. von  $2 \overline{) 92} 25 \begin{array}{|c|c|} \hline h, z. \\ \hline 4 & 3. \\ \hline \end{array}$

$2hz = 2 \overline{) 4} \dots$  abgezogen habe, von dem

Reste  $52 \overline{) 25} = z^2 + 2(h+z)e + e^2$ , auch noch

(\*\*)  $z^2 = 9 \overline{) 25}$  abgezogen werden kan. (\*\*\*) Nun

bleibt noch  $43 \overline{) 25} = 2(h+z)e + e^2$ ,

In diesem Reste ist also noch  $2(h+z)e$  enthalten, welches als ein Produkt, dessen einer Faktor aus Hunderten und Zehnern besteht, nothwendig in der ersten Decimalstelle 0 haben mus; so daß alle wirkliche Zahlen desselben in keine niedrigere als die zweite Decimalstelle fallen können. Da nun  $2(h+z)$  das ist  $2 \cdot 43$  das ist 86. in  $43 \overline{) 2}$  aufs höchste 5 mal enthalten ist; so kan der dritte Wurzeltheil e nicht

(\*\*) Die 9 mus nämlich unter die dritte Decimalstelle gesetzt werden, weil  $z^2$  als ein Produkt von 2 reinen Zehnern nothwendig in den beiden ersten Decimalstellen 00 haben mus.

(\*\*\*) Fände sich aber nun etwan  $z^2$  zu groß, als daß es noch abgezogen werden könnte; so müste z immer kleiner angenommen werden, bis  $(2hz + z^2)$  entweder eben so groß, oder kleiner als  $2 \overline{) 92}$  wird.

## 172 Zehntes Kapitel: Von den

nicht größer als 5 sein, und er darf auch nicht kleiner als 5 genommen werden; da man, nachdem

$$\begin{array}{r}
 \text{von } 43 \overline{) 25} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline h, z, e \\ \hline 4 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \text{abgezogen} \\
 \text{ist } 2(h+z)e = 43 \overline{) 0}, \quad \text{, von dem} \\
 \text{Reste } 25 = e^2 \quad \text{auch noch} \\
 e^2 = 25 \quad \text{abziehen kan.} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Da nach diesem letzten Abzuge nichts weiter übrig bleibt; so können wir versichert sein, daß  $400 + 30 + 5$ , das ist, 435 die gesuchte Quadratwurzel ganz genau angiebt; wovon man sich auch noch durch eine Probe versichern kan, indem man diese Wurzel 435 in sich selbst multiplicirt.

### §. 264.

Die Wurzel von  $8 \overline{) 43 \overline{) 32 \overline{) 16}}$  muß 4 Decimalstellen haben, wenn ich deshalb außer den Zahlen  $e + z + h$ , welche die Ziffern der Einer, Zehner und Hunderte der gesuchten Wurzel wie vorhin bedeuten sollen, auch die Ziffer der Tausende, welche sie enthält, durch  $t$  bezeichne;

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 173

so wird  $t + h + z + e = \sqrt{8433216}$   
 also  $(t + h + z + e)^2 = 8433216$  das ist  
 (§. 260.)  $t^2 + 2th + h^2 + 2tz + 2hz + z^2 + 2te$   
 $+ 2he + 2ze + e^2 = 8433216$   
 oder  $t^2 + 2th + h^2 + 2(t+h)z + z^2 +$   
 $2(t+h+z)e + e^2 = 8433216.$

Da nun  $t^2$ , als ein Produkt von 2 reinen Tausendzahlen, sechs 000000, das zweite Glied  $2th$ , als ein Produkt, worin eine Tausend- und eine Hundertzahl Faktoren sind, fünf 00000, das folgende Glied  $h^2$ , vier 0000 u. s. m. jedes folgende Glied immer eine 0 weniger hinter sich haben mus: so können vom ersten Gliede  $t^2$  keine Ziffern niedriger als bis in die 7te Decimalstelle, vom 2ten Gliede  $2th$  keine Ziffern niedriger, als bis in die sechste, von dem folgenden Gliede  $h^2$  keine Ziffern niedriger als in die fünfte Decimalstelle u. fallen, und es können keine Zahlen dieser Glieder in niedrigeren Decimalstellen der Zahl 8433216 enthalten sein, als diejenigen sind, worunter ein jedes Glied in folgendem Schema geschrieben ist:

8	4	3	3	2	1	6	8	4	3	3	2	1	6	t, h, z, e,
t <sup>2</sup>	.	.	.	.	.	.	4	.	.	.	.	.	.	2 9 0 4
							4	4	3	.	.	.	.	
(2t)	h	.	.	.	.	.	2t =	(4)	.	.	.	.	.	
	h <sup>2</sup>	.	.	.	.	.	3	6	.	.	.	.	.	
								8	1	.	.	.	.	
								2	3	2	.	.	.	
2(t+h)	z	.	.	.	.	.	2(t+h) =	(5	8)	.	.	.	.	
	z <sup>2</sup>	.	.	.	.	.				0	.	.	.	
								2	3	2	1	6	.	
2(t+h+z)	e	.	.	.	.	.	2(t+h+z) =	(58	0)	.	.	.	.	
	e <sup>2</sup>	.	.	.	.	.		2	3	2	0	.	.	
											1	6	.	
													0	

§. 265.

Aus diesem allen ergeben sich nun für die Ausziehung einer Quadratwurzel folgende allgemeine Regeln, deren Anwendung obiges Schema vor Augen stellt.

1) Man theile die gegebne Zahl in Klassen, deren erste aus den Einern und Zehnern, die zweite aus den Hunderten und Tausenden, ic. besteht.

2) Ziehe von den Quadraten 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 der Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 das möglichst größte von den Zahlen der höchsten Klasse ab, bemerke die Wurzel dieses abgezogenen Quadrates, als den ersten Wurzeltheil, und

3)

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 175

3) Schreibe neben den etwa gebliebenen Rest die Zahlen der folgenden Klasse.

4) Schreibe das Duplum des bereits angeschriebenen Wurzeltheiles in Klammern eingeschlossen dergestalt, daß die niedrigste Decimalstelle desselben unter der höchsten Decimalstelle der herabgerückten Klasse stehe.

5) Ueberschlage wie oft dieses Duplum in den darüber stehenden Zahlen enthalten sei, und schreibe den Quotienten als den zweiten Wurzeltheil an. (\*)

6) Multiplicire mit dem eben angeschriebenen Wurzeltheil das in Klammern eingeschlossene Duplum, und schreibe das Produkt gerade darunter, so daß seine geringste Decimalstelle in die höchste Decimalstelle der herabgerückten Klasse trifft.

7) Schreibe das Quadrat des zuletzt angeschriebenen Wurzeltheiles darunter eine Decimalstelle niedriger, und

8) ziehe dies Quadrat nebst dem darüberstehenden Produkte von den darüberstehenden Zahlen dieser und denen von der höhern Klasse etwa übriggebliebenen Zahlen ab. (\*\*)

Nun

(\*) Dieser Quotient giebt aber nach Anmerk. (\*\*\*)

S. 263 erst in dem Falle wirklich den neuen Wurzeltheil richtig an, wenn auch das Quadrat desselben nach No. 8 noch abgezogen werden kan: aber

(\*\*) Sollte dies Quadrat größer als der darüberstehende Rest sein; so wäre dies eine Anzeige, daß der neue Wurzeltheil zu groß angesetzt wäre, und kleiner angenommen werden müßte.

## 176 Fünftes Kapitel. Von den

Stummehro fängt man aufs neue an, nach den Regeln von 3 bis 8 so lange zu verfahren, bis man alle Klassen heruntergerückt hat. Man schreibe nämlich

3) neben den jetzt erman gebliebenen Rest die Zahlen der folgenden Klasse und

4) schreibe das Duplum des bereits angeschriebenen Wurzeltheils (welcher nun aus zwei Decimalstellen besteht) in Klammern eingeschlossen, &c. (wie oben bei 4.)

§. 266.

Durch dasjenige was §. 164 von der Quadrirung einer gebrochenen Zahl gesagt ist, daß nämlich  $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$  sei, können wir sehr

leicht auf die Gedanken gerathen, daß umgekehrt die Quadratwurzel eines jeden Bruches gefunden werden müsse, indem man sowohl aus dem Zähler als Nenner die Quadratwurzel zieht, also daß  $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$  sei. Und wir können uns in der

That von der Richtigkeit dieses Satzes auf folgende Weise allgemein überzeugen.

laßt uns schreiben 1)  $\sqrt{\frac{p}{q}} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ , das ist,

wir fragen, ob wohl diese Fragegleichung bejaht werden könne. Ich sage, wenn diese Gleichung

2)  $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$  richtig ist; so  
mus

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 177

mus auch die bei 1) richtig sein (§. 162.). Die Gleichung bei 2) sagt ferner (p. 8. V.) einerlei mit

folgender 3)  $\sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p} \sqrt{p}}{\sqrt{q} \sqrt{q}}$  und diese

nach §. 159. einerlei mit 4)  $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$ ; welche nun

ohne alle Zweifel nach dem Grundsatz, daß jede GröÙe sich selbst gleich ist, bejahet werden mus, folglich mus auch die gleichbedeutende bei 3) und ferner die gleichbedeutende bei 2), folglich auch die bei 1) bejahet werden.

Demnach ist des Bruches  $\frac{4}{9}$  Quadratwurzel  $\frac{2}{3}$ , und  $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}$ , und  $\sqrt{\frac{189225}{8433216}} = \frac{\sqrt{189225}}{\sqrt{8433216}} = \frac{435}{2904}$ .

§. 267.

Die Zahlen 4, 9, 16, 144, 189225 heißen vollkommne Quadratzahlen, weil sich ihre Wurzeln als 2, 3, 4, 12, 435, mit größter Genauigkeit angeben lassen. Es giebt aber weit mehrere andere Zahlen, z. B. 7, 12, 113, 2c. für die man keine Wurzel, das ist, keine Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt eine solche Zahl genau herausbringt, angeben kan. Solche Zahlen heißen irrationale Zahlen. Daß es nun z. B. keine ganze Zahl ge-  

M
ben

## 178 Zehntes Kapitel. Von den

ben kan, welche mit sich selbst multiplicirt 12 her-  
vorbringt, ist gar leicht zu übersehen, da 3 zu klein  
und 4 schon zu groß ist. Sollte es also ja noch eine  
Wurzel von 12 geben; so müste sie größer als 3  
und kleiner als 4, folglich ein Bruch sein. In  
der That kömt das Quadrat von  $3\frac{1}{2}$  oder  $\frac{7}{2}$ , näm-  
lich  $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$ , der Zahl 12 schon ziemlich nahe,  
und wenn man einen Bruch annähme, der um  
etwas wenigens kleiner als  $\frac{7}{2}$  wäre, so würde dieser  
Bruch vielleicht ein Quadrat geben, welches  
nur noch ungemein wenig von 12 verschieden wäre:  
aber ich behaupte, daß man nie einen Bruch finden  
werde, welcher mit sich selbst multiplicirt ganz ge-  
nau 12 giebt. Der strenge Erweis dieser Be-  
hauptung kan nur aus gewissen Eigenschaf-  
ten unserer Decimalzahlen hergeleitet werden, deren  
Kenntnis wir hier noch nicht voraussetzen wollen.  
Nöthig aber ist es, ein allgemeines Mittel kennen  
zu lernen, wodurch man die Wurzeln solcher Irra-  
tionalzahlen mit der jedesmal nöthigen Genauig-  
keit finden kan.

### §. 268.

Dies geschieht am bequemsten, wenn man  
eine solche Irrationalzahl in Hundert, Zehntausend-  
Millionen-Theilchen, 1c. verwandelt. So ist z. B.  
 $12 = \frac{1200}{100}$ , folglich auch  $\sqrt{12} = \frac{\sqrt{1200}}{\sqrt{100}}$  Sänge

man



# Quadratzahlen u. Quadratwurz. 179

Man nun an, die Wurzel aus 1200 zu ziehen; so findet

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 00 \\
 \hline
 9 & \\
 \hline
 3 & 00 \\
 & (6) \\
 & 256 (*) \\
 \hline
 & 44
 \end{array}$$

man 34 freilich nur als eine unvollkommene Wurzel von 1200, indem  $34 \cdot 34$  nur 1156 und nicht 1200 giebt. Wenn wir aber diesen Fehler nicht achten, und 34 als die Wurzel von 1200 annehmen wollen; so können wir schließen, da  $\sqrt{12} = \sqrt{1200} \sqrt{100}$  ist,

daß  $\sqrt{12} = \frac{34}{10} = 3,4$  sein müsse. Der Fehler, welcher hierbei begangen wird, kan kein ganzes Zehntel mehr betragen, weil man sonst  $\sqrt{1200} = 35$  würde gefunden haben. Um aber auch die zur vollkommern Wurzel noch fehlenden Hundert- und Tausend- und Zehntausendtheilchen zu finden; so darf man nur nehmen  $\sqrt{12} = \frac{\sqrt{1200000000}}{\sqrt{100000000}}$  und die

obige Wurzelausziehung weiter fortsetzen, indem  
M 2
man

(\*) 256 ist nämlich die Summe von 24 (= (6.) 4)  
und 16 (= 4<sup>2</sup>)

indem es bequemer ist, diese Summe mit einemmal abzuziehen, als wenn man erst das Produkt 24. und darauf von dem bleibenden Reste das Quadrat 16. abzieht.

# 180 Zehntes Kapitel. Von den

man nach und nach noch 3 Klassen von 00 neben den gebliebenen Rest schreibt. Dadurch findet man

$$\begin{array}{r|l}
 12 \overline{) 00} & 00 \\
 \underline{44} & 00 \\
 (68) & \\
 4116 & \\
 \hline
 284 \overline{) 00} & 00 \\
 \underline{(692)} & \\
 27696 & \\
 \hline
 704 \overline{) 00} & 00 \\
 \underline{(6928)} & \\
 69281 & \\
 \hline
 & 1119
 \end{array}$$

34641 als eine ziemlich genaue Wurzel von 1200000000. läßt man den dabei noch begangenen Fehler aus der Acht und nimmt an, daß  $34641 =$

$$\sqrt{1200000000} \text{ sei; so wird } \sqrt{12} \left( = \frac{\sqrt{1200000000}}{\sqrt{100000000}} \right)$$

$= \frac{34641}{100000} = 3,4641$  sein, so daß nun bei dieser Wurzel nicht mehr um ein Zehntausendtheilchen der Einheit in 12 gefehlt wird, und  $(3,4641)^2$  giebt 11,99998881, welche Zahl nur um 0,00001119 kleiner, als 12 ist.

§. 269.

Daß man eine Irrationalzahl nie in  $\frac{1}{10}$ tel, oder  $\frac{1}{100}$ tel, oder  $\frac{1}{1000}$ tel, sondern immer in solchen Decimalbrüchen ausdrückt, deren Nenner eine



## 182. Zehntes Kapitel. Von den

wenn wir uns eine Wurzel gedenken, welche ausser der Ziffer in der Einheitsstelle, welche  $e$  heissen soll, auch noch in der Zehntelstelle eine Ziffer  $z$  hat, wo also sowohl  $e$ , als  $z$  eine jede Ziffer von 1, 2, 3, ..., 8, 9 bedeuten kan; so wird  $(e + z)^2 = e^2 + 2ez + z^2$  sein. In dieser Reihe wird nun  $e^2$ , eine ganze Zahl sein,  $2ez$  aus Zehnteln, und  $z^2$  als ein Produkt aus zwei Zehnteln, aus Hunderteln bestehen. Da nun  $z$  aufs höchste 9 sein kan; so wird in  $z^2$  der Zähler allemal kleiner als der Nenner sein, und folglich dieser Bruch für sich allein genommen nie einer ganzen Zahl gleich werden.

Da aber ferner kein Quadrat der einfachen Zahlen 1, 2, 3, ..., 8, 9, welche  $z$  bedeuten kan, in seiner ersten Decimalstelle 0 hat; so kan auch in dem Bruche  $z^2$  nie der Zähler eben so wohl, als der Nenner, ohne Rest durch 10 dividirt, folglich dieser Bruch nie zu Zehnteln gemacht werden, welche sonst etwa mit den Zehnteln  $2ez$  zusammengenommen eine ganze Zahl geben könnten.

### §. 271.

Eine Proportion, deren mittlere Glieder einander gleich sind, wie  $p:q = q:r$ , oder  $1:a = a:a^2$ , heisst eine stätige Proportion (proportio continua) und  $q$  heisst die mittlere Proportionalzahl zwischen  $p$  und  $r$ ,  $a$  die mittlere Proportionalzahl zwischen 1 und  $a^2$ .

### §. 272.

## Quadratzahlen u. Quadratwurz. 183

§. 272.

Wenn nun  $s$  die mittlere Proportionalzahl zwischen  $g$  und  $h$ , also  $g:s = s:h$  ist, so ist (§. 180.)  $s^2 = gh$ , folglich (§. 162.)  $s = \sqrt{gh}$ , also ist die mittlere Proportionalzahl allemal gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden äussern Glieder.

Umgekehrt kan ich daher die Gleichung  $s = \sqrt{gh}$  in folgende Proportionen

$$g:s = s:h$$

oder  $1:s = s:gh$  auflösen, welches für Anfänger noch deutlicher wird, wenn man auf folgende Weise schließt. Wenn  $s = \sqrt{gh}$  sein sol; so mus auch (§. 161.)  $s^2 = gh$  folglich (§. 190.)  $g:s = s:h$  sein.

Eben so mus, wenn  $b = \sqrt{a}$  folglich  $b^2 = a$ , oder  $b:b = 1:a$  ist, auch  $1:b = b:a$ , oder  $1:\sqrt{a} = \sqrt{a}:a$ , also die Quadratwurzel einer jeden Zahl die mittlere Proportionalzahl zwischen der Einheit und dieser Zahl sein.

§. 273.

### LIX. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Parallelogramme dem Flächenraume nach gleich ist.

§. 274.

### Auflösung.

Die Zahl, durch welche nach irgend einem angenommenen Masse die Grundlinie des Parallelogramms

## 184 · Zehntes Kapitel. Von den

Parallelogrammes AB ausgedrückt werden kan, sei  $b$ , die Zahl durch welche alsdann die Höhe desselben, DH ausgedrückt wird, sei  $h$ , und die Zahl der Maße in der gesuchten Seite DQ des verlangten Quadrats sei  $x$ ; so mus (Num. 30.)  $xx = bh$ , daher  $x = \sqrt{bh}$  sein.

§. 275.

Gesezt nun es wäre  $b = 9$ ,  $h = 4$ , so wird gefunden  $x = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ ; und ein Quadrat, dessen Seite  $= 6''$ , enthält allerdings eben sowohl  $36\Box''$ , als ein Parallelogram, dessen Grundlinie  $9''$  und Höhe  $4''$  ist.

Würde aber bei Messung der Linie AB und DH gefunden  $b = 4''$ ,  $h = 3''$ ; so würde  $x = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$ , folglich  $x$  eine irrationelle Wurzel (Wurzel einer unvollkommenen Quadratzahl 12) nur beiläufig  $= 3,4$  zc. etwas genauer  $= 3,46$  zc. noch genauer  $= 3,464$  zc. aber niemals ganz genau gefunden werden; ob gleich bei diesem letzten Werthe  $x = 3,464$  zc. um kein ganzes Tausendtel der Einheit mehr gefehlt wird. Wenn daher die Einheit in 12 ein Zol wäre; so würde der begangne Fehler kein Zehntel einer Linie mehr betragen; sondern nur noch ein oder mehrere Hunderttheilchen einer Linie ausmachen, welches so unbedeutliche Größen sind, daß sie nur von sehr guten Augen noch bemerkt und abgemessen werden könnten.

§. 276.

§. 276.

Geometrische Konstruktion.

Wenn  $xx = bh$  genommen wird; so wird  
 $b : x :: x : h$ ; folglich  
 auch  $AB : DQ = DQ : DH$  sein, weil ganz  
 notwendig die  $AB$  eben so in der  $DQ$  enthalten sein  
 mus, wie  $b$ , die Zahl der Maße von  $AB$  in  $x$ ,  
 der Zahl der Maße von  $DQ$ , das ist,  $AB : DQ$   
 $= b : x$ , und eben so auch  $DQ : DH = x : h$  sein  
 mus.  $DQ$ , die gesuchte Seite des Quadrats,  
 wird daher als die mittlere Proportionallinie zwischen  
 $AB$  und  $DH$  (Num. 42.) gefunden; indem Fig.  
 12  $AH = AB + DH$ , der Radius des beschrieb-  
 nen Cirkels  $CA = (AB + DH) : 2$  genommen, und  
 aus  $D$  die Normale  $DQ$  aufgerichtet wird.

§. 277.

Wird nun  $AB = 9''$   $DH = 4''$  genommen,  
 so wird auf diese Weise notwendig  $DQ = 6''$  ganz  
 genau gefunden werden. Es wird aber auch diese  
 gefundene mittlere Proportionale  $DQ$  allemal ganz  
 genau von dem Cirkelkraise in  $Q$  abgeschnitten wer-  
 den, von welcher Größe man auch die  $AB$  und  $DH$   
 annehmen mag. Wenn wir nun z. B. die  
 $AB = 4''$  die  $DH = 3''$ ; so wird auch in diesem  
 Falle die mittlere Proportionale  $DQ$  ganz genau ab-  
 geschnitten und von ganz bestimmter Größe gefunden  
 werden.

## 186 Zehntes Kapitel. Von den Maßen.

werden. Würde man indessen diese DQ mit dem Cirkel fassen, und nach demselben Decimalmaße, wonach die AB 4" und die DH 3" hält, auch diese DQ messen; so würden ~~war ganz gewöhnliche~~ Augen angeben, daß diese DQ genau 3,46" enthalte, aber bessere Augen würden entdecken, daß diese DQ außerdem noch 0,004" enthielte, und nur wegen der Schwäche des menschlichen Gesichts, welches die nunmehr noch fehlenden 1" und 1"

~~10000 100000~~  
Theilchen nicht mehr unterscheiden kan, können wir es nicht entdecken, daß weder durch 3,464" noch durch 3,4641" und überhaupt durch keine noch so kleine Decimaltheilchen irgend eines Maßes die DQ gemessen werden könne. Denn ob uns gleich unsre Sinne hier verlassen; so wissen wir es doch schon durch richtige Schlüsse unsers Verstandes (§. 270.) daß die Wurzel der Zahl 12, ob diese Wurzel gleich nothwendig eine bestimmte Größe haben mus, doch durch keine Decimalbrüche niemals genau angegeben, folglich auch keine mitlere Proportionalinie zwischen zwei Linien, deren eine nach irgend einem Maße 1 Theil und die andere 12 Theile enthält, durch noch so kleine Decimaltheile dieses Maßes niemals genau ausgemessen werden kan.



Elftes



## Fünftes Kapitel.

### Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

§. 278.

Eine Gleichung, welche zuletzt auf die Form  $x^2 = S$  gebracht werden kan, wo die Seite  $S$  aus einem oder mehreren Gliedern bestehet, in welchen aber kein  $x$  enthalten sein mus, heißt eine reine quadratische Gleichung, aus welcher allemal (§. 162.)  $x = \sqrt{S}$  gefunden wird. Z. B.

in  $x^2 = a - \frac{m}{n} + pq$  ist  $x = \sqrt{a - \frac{m}{n} + pq}$

in  $x^2 = 36 + 4a$  ist  $x = \sqrt{36 + 4a}$ .

§. 279.

Man mus nämlich alle Glieder, welche sich unter dem Wurzelzeichen befinden, sobald ste in bestimmten Zahlen angegeben sind, zusammen addiren, und darauf aus dieser Summe, nicht aber etwan aus den einzelnen Gliedern nach und nach, die Quadratwurzel ziehen. Z. B. wenn  $x^2 = 16 + 9$ ; so ist  $x = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ ; aber es ist nicht  $x = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ , wonach  $x = 4 + 3 = 7$ , also um 3 zu groß gefunden würde.

Eben

# 188 Erstes Kapitel. Auflösung

Eben so kan ohnmöglich  $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$  sein. Denn wenn wir schreiben

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2}$$

so ist nun || (§. 253.)  
 folglich da (\*)  $a + b$   
 mus auch  $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} < \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2}$   
 sein.

§. 280.

Aber wenn S ein Produkt aus mehreren Faktoren ist, so kan man gar wohl die Wurzel aus einem oder mehreren einzelnen Faktoren ziehen, und als Faktoren vor der etwan noch übrigen Wurzelgröße schreiben. So ist z. B.

$$\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 100} = 2 \sqrt{9 \cdot 100} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 3 \cdot 10$$

$$\sqrt{3600} = 60, \quad 2 \cdot 30 \quad 6 \cdot 10$$

Und daß überhaupt allemal  $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \sqrt{q}$  sei, davon können wir uns auf folgende Weise allgemein überzeugen. Der uns unbekannte Werth der Größe  $\sqrt{p} \sqrt{q}$  mag sein, welcher er wil; so können wir doch, wenn wir diese Größe durch G bezeichnen, und also

$$\sqrt{p} \sqrt{q} = G \text{ setzen, nach §. 161 gewis sein, daß alsdan auch } pq = G^2 \text{ sein müsse. Wenn aber dies}$$

(\*) Wird gelesen  $a + b$  kleiner ist als  $a + \sqrt{2ab} + b$ .  
 So wie  $p > q$  gelesen wird: p ist größer als q.

## der reinen quadratischen Gleichungen. 189

dies ist, so mus nach §. 162 auch  $\sqrt{pq} = G$ , folglich (§. 43.)  $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \sqrt{q}$  sein.

### §. 281.

Die Schlüsse, nach welchen im vorigen §. gefolgert wurde, daß  $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \sqrt{q}$  sei, bleiben völlig richtig: wenn wir uns auch einen von diesen beiden Faktoren, oder beide als ein Produkt aus mehreren Faktoren vorstellen. Folglich ist hiermit zugleich erwiesen, daß auch z. B.  $\sqrt{m n r s}$  ( $= \sqrt{m (n r s)}$ )  $= \sqrt{m} \sqrt{n r s} = \sqrt{m n r} \sqrt{s}$ , oder auch, daß  $\sqrt{m n r s} (= \sqrt{(m n) (r s)}) = \sqrt{m n} \sqrt{r s} = \sqrt{m} \sqrt{n} \sqrt{r} \sqrt{s}$ . Eben so ist  $\sqrt{a x^2 n p^2} = p x \sqrt{a n}$ ;

$$\sqrt{\frac{p^2 \cdot a n^2}{4 q^2}} (= \frac{\sqrt{p^2 n^2} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{4 q^2}}) = \frac{p n}{2 q} \sqrt{a}.$$

### §. 282.

Die Quadratwurzel von  $a^2$  ist diejenige Zahl, welche durch sich selbst multipliziert  $a^2$  giebt. Nun giebt aber nicht nur  $a \cdot a = a^2$ , sondern auch  $-a \cdot -a = a^2$  (§. 240.), eben so ist nicht nur  $4 \cdot 4 = 16$ ; sondern auch  $-4 \cdot -4 = 16$ ; und auf diese Art hat eine jede positive Zahl zwei Quadratwurzeln, welche absolute genommen sich gleich sind, und wovon die eine positiv, die andere negativ ist.

Wenn auch eine Zahl irrational ist; so kan dies hierin keinen Unterschied machen. Es kan z. B.

## 182 .. Zehntes Kapitel. Von den

wenn wir uns eine Wurzel gebenten, welche außer der Ziffer in der Einheitsstelle, welche  $e$  heißen sol, auch noch in der Zehntelstelle eine Ziffer  $z$  hat, wo also sowohl  $e$ , als  $z$  eine jede Ziffer von 1, 2, 3, ..., 8, 9 bedeuten kan; so wird  $(e + z)^2 = e^2 + 2ez + z^2$  sein. In dieser Reihe wird nun  $e^2$ , eine ganze Zahl sein,  $2ez$  aus Zehnteln, und  $z^2$  als ein Produkt aus zwei Zehnteln, aus Hunderteln bestehen. Da nun  $z$  aufs höchste 9 sein kan; so wird in  $z^2$  der Zähler allemal kleiner als der Nenner sein, und folglich dieser Bruch für sich allein genommen nie einer ganzen Zahl gleich werden.

Da aber ferner kein Quadrat der einfachen Zahlen 1, 2, 3, ..., 8, 9, welche  $z$  bedeuten kan, in seiner ersten Decimalstelle 0 hat; so kan auch, in dem Bruche  $z^2$  nie der Zähler eben so wohl, als der Nenner, ohne Rest durch 10 dividirt, folglich dieser Bruch nie zu Zehnteln gemacht werden, welche sonst etwa mit den Zehnteln  $2ez$  zusammengenommen eine ganze Zahl geben könnten.

§. 271.

Eine Proportion, deren mittlere Glieder einander gleich sind, wie  $p:q = q:r$ , oder  $1:a = a:a^2$ , heißt eine stätige Proportion (proportio continua) und  $q$  heißt die mittlere Proportionalzahl zwischen  $p$  und  $r$ ,  $a$  die mittlere Proportionalzahl zwischen 1 und  $a^2$ .

§. 272.

# Quadratzahlen u. Quadratwurz. 183

§. 272.

Wenn nun  $s$  die mittlere Proportionalzahl zwischen  $g$  und  $h$ , also  $g : s = s : h$  ist, so ist (§. 180.)  $s^2 = gh$ , folglich (§. 162.)  $s = \sqrt{gh}$ , also ist die mittlere Proportionalzahl allemal gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden äussern Glieder.

Umgekehrt kan ich daher die Gleichung  $s = \sqrt{gh}$  in folgende Proportionen

$$g : s = s : h$$

oder  $1 : s = s : gh$  auflösen, welches für Anfänger noch deutlicher wird, wenn man auf folgende Weise schließt. Wenn  $s = \sqrt{gh}$  sein sol; so mus auch (§. 161.)  $s^2 = gh$  folglich (§. 190)  $g : s = s : h$  sein.

Eben so mus, wenn  $b = \sqrt{a}$  folglich  $b^2 = a$ , oder  $b : b = 1 : a$  ist, auch  $1 : b = b : a$ , oder  $1 : \sqrt{a} = \sqrt{a} : a$ , also die Quadratwurzel einer jeden Zahl die mittlere Proportionalzahl zwischen der Einheit und dieser Zahl sein.

§. 273.

## LIX. Aufgabe.

Die Seite eines Quadrats zu finden, welches einem gegebenen Parallelogramme dem Flächenraume nach gleich ist.

§. 274.

## Auflösung.

Die Zahl, durch welche nach irgend einem angenommenen Maße die Grundlinie des Parallelograms

elogrammes AB ausgedrückt werden kan, sei  $b$ , die Zahl durch welche alsdann die Höhe desselben, DH ausgedrückt wird, sei  $h$ , und die Zahl der Maße in der gesuchten Seite DQ des verlangten Quadrats sei  $x$ ; so mus (Num. 30.)  $xx = bh$ , daher  $x = \sqrt{bh}$  sein.

## §. 275.

Gesezt nun es wäre  $b = 9$ ,  $h = 4$ , so wird gefunden  $x = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ ; und ein Quadrat, dessen Seite  $= 6''$ , enthält allerdings eben sowohl  $36\Box''$ , als ein Parallelogram, dessen Grundlinie  $9''$  und Höhe  $4''$  ist.

Würde aber bei Messung der Linie AB und DH gefunden  $b = 4''$ ,  $h = 3''$ ; so würde  $x = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$ , folglich  $x$  eine irrationelle Wurzel (Wurzel einer unvollkommenen Quadratzahl 12) nur beiläufig  $= 3,4$  zc. etwas genauer  $= 3,46$  zc. noch genauer  $= 3,464$  zc. aber niemals ganz genau gefunden werden; ob gleich bei diesem letzten Werthe  $x = 3,464$  zc. um kein ganzes Tausendtel der Einheit mehr gefehlt wird. Wenn daher die Einheit in 12 ein Zol wäre; so würde der begangne Fehler kein Zehntel einer Linie mehr betragen; sondern nur noch ein oder mehrere Hunderttheilchen einer Linie ausmachen, welches so unbeträchtliche Größen sind, daß sie nur von sehr guten Augen noch bemerkt und abgemessen werden könnten.

## §. 276.

§. 276.

Geometrische Konstruktion.

Wenn  $xx = bh$  genommen wird; so wird  
 $b : x :: x : h$ ; folglich  
 auch  $AB : DQ = DQ : DH$  sein, weil ganz  
 notwendig die  $AB$  eben so in der  $DQ$  enthalten sein  
 mus, wie  $b$ , die Zahl der Maße von  $AB$  in  $x$ ,  
 der Zahl der Maße von  $DQ$ , das ist,  $AB : DQ$   
 $= b : x$ , und eben so auch  $DQ : DH = x : h$  sein  
 mus.  $DQ$ , die gesuchte Seite des Quadrats,  
 wird daher als die mittlere Proportionallinie zwischen  
 $AB$  und  $DH$  (Num. 42.) gefunden; indem Fig.  
 12  $AH = AB + DH$ , der Radius des beschrieb-  
 nen Cirkels  $CA = (AB + DH) : 2$  genommen, und  
 aus  $D$  die Normale  $DQ$  aufgerichtet wird.

§. 277.

Wird nun  $AB = 9''$   $DH = 4''$  genommen,  
 so wird auf diese Weise notwendig  $DQ = 6''$  ganz  
 genau gefunden werden. Es wird aber auch diese  
 gefundene mittlere Proportionale  $DQ$  allemal ganz  
 genau von dem Cirkelkraise in  $Q$  abgeschnitten wer-  
 den, von welcher Größe man auch die  $AB$  und  $DH$   
 annehmen mag. Wenn wir nun z. B. die  
 $AB = 4''$  die  $DH = 3''$ ; so wird auch in diesem  
 Falle die mittlere Proportionale  $DQ$  ganz genau ab-  
 geschnitten und von ganz bestimmter Größe gefunden  
 werden.

## 286 Zehntes Kapitel. Von den Maßen.

werden. Würde man indessen diese DQ mit dem Cirkel fassen, und nach demselben Decimalmaße, wonach die AB 4" und die DH 3" hält, auch diese DQ messen; so würden zwar ganz gewöhnliche Augen angeben, daß diese DQ genau 3,46" enthalte, aber bessere Augen würden entdecken, daß diese DQ außerdem noch 0,004" enthielte, und nur wegen der Schwäche des menschlichen Gesichts, welches die nunmehr noch fehlenden 1" und 1"

<sup>10000 10000</sup> Theilchen nicht mehr unterscheiden kan, können wir es nicht entdecken, daß weder durch 3,464" noch durch 3,4641" und überhaupt durch keine noch so kleine Decimaltheilchen irgend eines Maßes die DQ gemessen werden könne. Denn ob uns gleich unsre Sinne hier verlassen; so wissen wir es doch schon durch richtige Schlüsse unsers Verstandes (§. 270.) daß die Wurzel der Zahl 12, ob diese Wurzel gleich nothwendig eine bestimmte Größe haben mus, doch durch keine Decimalbrüche niemals genau angegeben, folglich auch keine mittlere Proportionalinie zwischen zwei Linien, deren eine nach irgend einem Maße 1 Theil und die andere 12 Theile enthält, durch noch so kleine Decimaltheile dieses Maßes niemals genau ausgemessen werden kan.



Elftes



## Fünftes Kapitel.

### Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

§. 278.

Eine Gleichung, welche zuletzt auf die Form  $x^2 = S$  gebracht werden kan, wo die Seite  $S$  aus einem oder mehreren Gliedern besteht, in welchen aber kein  $x$  enthalten sein mus, heißt eine reine quadratische Gleichung, aus welcher allemal (§. 162.)  $x = \sqrt{S}$  gefunden wird. Z. B.

in  $x^2 = a - \frac{m}{n} + pq$  ist  $x = \sqrt{a - \frac{m}{n} + pq}$

in  $x^2 = 36 + 4a$  ist  $x = \sqrt{36 + 4a}$ .

§. 279.

Man mus nämlich alle Glieder, welche sich unter dem Wurzelzeichen befinden, sobald sie in bestimmten Zahlen angegeben sind, zusammen addiren, und darauf aus dieser Summe, nicht aber etwan aus den einzelnen Gliedern nach und nach, die Quadratwurzel ziehen. Z. B. wenn  $x^2 = 16 + 9$ ; so ist  $x = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ ; aber es ist nicht  $x = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ , wonach  $x = 4 + 3 = 7$ , also um 3 zu groß gefunden würde.

Eben

## 188 Erstes Kapitel. Auflösung

Eben so kan ohnmöglich  $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$   
 $= \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2}$  sein. Denn wenn wir  
 schreiben

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2}$$

so ist nun  $\parallel$  (§. 253.)  $\parallel$   
 folglich da(\*)  $a + b < a + \sqrt{2ab} + b$   
 mus auch  $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} < \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2}$   
 sein.

§. 280.

Aber wenn S ein Produkt aus mehreren Fak-  
 toren ist, so kan man gar wohl die Wurzel aus ei-  
 nem oder mehreren einzelnen Faktoren ziehen, und  
 als Faktoren vor der etwan noch übrigen Wurzel-  
 größe schreiben. So ist z. B.

$$\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 100} = 2 \sqrt{9 \cdot 100} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 3 \cdot 10$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$\sqrt{3600} = 60, \quad 2 \cdot 30, \quad 6 \cdot 10$$

Und daß überhaupt allemal  $\sqrt{pq} = \sqrt{p} \sqrt{q}$   
 sei, davon können wir uns auf folgende Weise al-  
 gemein überzeugen. Der uns unbekannte Werth  
 der Größe  $\sqrt{p} \sqrt{q}$  mag sein, welcher er wil; so  
 können wir doch, wenn wir diese Größe durch G  
 bezeichnen, und also

$\sqrt{p} \sqrt{q} = G$  setzen, nach §. 161 gewis sein,  
 daß alsdan auch  $p q = G^2$  sein müsse. Wenn aber  
 dies

(\*) Wird gelesen  $a + b$  kleiner ist als  $a + \sqrt{2ab} + b$ .

So wie  $p > q$  gelesen wird:  $p$  ist größer als  $q$ .

## der reinen quadratischen Gleichungen. 189

dies ist, so mus nach §. 162 auch  $\sqrt{p q} = G$ , folglich (§. 43.)  $\sqrt{p q} = \sqrt{p} \sqrt{q}$  sein.

§. 281.

Die Schlüsse, nach welchen im vorigen §. gefolgert wurde, daß  $\sqrt{p q} = \sqrt{p} \sqrt{q}$  sei, bleiben völlig richtig: wenn wir uns auch einen von diesen beiden Faktoren, oder beide als ein Produkt aus mehreren Faktoren vorstellen. Folglich ist hiermit zugleich erwiesen, daß auch z. B.  $\sqrt{m n r s}$  ( $= \sqrt{m (n r s)}$ )  $= \sqrt{m} \sqrt{n r s} = \sqrt{m n r} \sqrt{s}$ , oder auch, daß  $\sqrt{m n r s} (= \sqrt{(m n) (r s)}) = \sqrt{m n} \sqrt{r s} = \sqrt{m} \sqrt{n} \sqrt{r} \sqrt{s}$ . Eben so ist  $\sqrt{a x^2 n p^2} = p x \sqrt{a n}$ ;

$$\sqrt{\frac{p^2 \cdot a n^2}{4 q^2}} (= \sqrt{\frac{p^2 n^2}{4 q^2}} \cdot \sqrt{a}) = \frac{p n}{2 q} \sqrt{a}.$$

§. 282.

Die Quadratwurzel von  $a^2$  ist diejenige Zahl, welche durch sich selbst multiplicirt  $a^2$  giebt. Nun giebt aber nicht nur  $a \cdot a = a^2$ , sondern auch  $-a \cdot -a = a^2$  (§. 240.), eben so ist nicht nur  $4 \cdot 4 = 16$ ; sondern auch  $-4 \cdot -4 = 16$ ; und auf diese Art hat eine jede positive Zahl zwei Quadratwurzeln, welche absolute genommen sich gleich sind, und wovon die eine positiv, die andere negativ ist.

Wenn auch eine Zahl irrational ist; so kan dies hierin keinen Unterschied machen. Es kan z. B.

## 192 Fünftes Kapitel. Auflösung

daß  $(x+a)(x-a) = c$  sei

d. i.  $x^2 - a^2 = c$ , daher

auch  $x^2 = c + a^2$

und  $x = \pm \sqrt{c + a^2}$

Für  $c = 16$ , und  $a = 3$ , findet man  $x = \pm$

$\sqrt{16 + 9} = \pm 5$ . Diese Zahl kan also sowohl  $+5$

als  $-5$  sein; und es ist allerdings sowohl  $1)(5+3) \cdot$

$(5-3) = 16$ , als auch  $2)(-5+3) \cdot (-5-3)$

$= -2 \cdot -8 = 16$ .

§. 288.

### LXII. Aufgabe.

Einige Kaufleute haben eingelegt, jeder 10 mal so viel Rthlr. als Personen sind, und gewinnen mit 100 Rthlr. zweimal so viel, als Personen sind: wenn man  $\frac{1}{100}$  Theil des ganzen Gewinnes durch  $2\frac{2}{3}$  multiplicirt, so kömt die Anzahl der Personen heraus. Wie viel Personen nehmen Theil am Handel?

§. 289.

### Auflösung.

Die unbekannte Anzahl der Personen sei  $x$ ; so hat jeder eingelegt  $10x$  Rthlr. alle  $x$  Personen haben demnach ein Kapital von  $10x^2$  Rthlr. zusammengebracht.

Nun verhält sich 100 Rthlr. zu  $10x^2$  Rthlr. wie der Gewinn von 100 Rthlr. nämlich  $2x$  Rthlr. zu dem Gewinne von  $10x^2$  Rthlr., welcher also

nach

## der reinen quadrat. Gleichungen. 193

nach  $100 : 10 x^2 = 2x : 20 x^2$

$20 x^2$  oder  $x^2$  beträgt, so daß

sein sol  $x^2 \cdot (2 + \frac{2}{5}) = x$ , also  $x^2 \cdot 20 = 1$ ,

$x^2 = \frac{4500}{20} = 225$ , und  $x = + \sqrt{225} = + 15$

Antwort. Es sind 15 Personen gewesen. Hiemit kan die Probe leicht angestellt werden, und man wird finden, daß die Zahl + 15 alles leiste, was in der Aufgabe verlangt wird. Die andere Wurzel — 15, welche hier keinen schicklichen Sinn giebt, kan daher gänzlich aus der Acht gelassen werden.

§. 290.

### LXIV. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, welche in einander multiplicirt das Product  $22\frac{1}{2}$ , die eine in die andere dividirt den Quotienten  $2\frac{1}{2}$  geben.

§. 291.

### Auflösung.

Man wird sich hier den Kalkül erleichtern, wenn man setzt  $22\frac{1}{2} = p$ , und  $2\frac{1}{2} = q$ . Setzt man nun ferner die eine gesuchte Zahl  $x$ , die andere  $y$ ; so mus sein

I)  $x y = p$ , II)  $\frac{x}{y} = q$ .

N

Aus

## 194 Fünftes Kapitel. Auflösung

Aus der zweiten Gleichung folgt,  $x = q y$ .  
Schreibt man nun in die erste Gleichung statt  $x$  die  
gleichgültige Größe  $q y$ ; so erhält man  $q y^2 = p$ ,  
eine Gleichung, worin nur noch die eine unbekannte  
Größe  $y$  vorhanden ist. Es folgt daraus ferner,  
daß  $y^2 = \frac{p}{q}$  folglich  $y = \pm \sqrt{\frac{p}{q}} = \pm \sqrt{\frac{45}{9}} = \pm \sqrt{5} = \pm 2\frac{1}{2}$ .  
 $= \pm \sqrt{\frac{45 \cdot 2}{5 \cdot 2}} = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ .

Nimmt man nun  $y = 3$ , so wird nach der  
I. Gleichung  $x y = 4\frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ ,  
und es ist in der That  $3 \cdot 4\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$  und  
 $4\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ .

Nimmt man aber auch  $y = -3$ , so wird  
 $x = \frac{45}{-6} = -7\frac{1}{2}$  und ebenfalls  $-3 \cdot -7\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$ ,  
und  $-7\frac{1}{2} : -3 = 2\frac{1}{2}$ .

§. 292.

### LXV. Aufgabe.

Zwei reitende Boten, welche zu gleicher Zeit  
von Hamburg und Berlin ausgeritten sind, und  
deren jeder seine ganze Reise hindurch immer mit  
gleicher Geschwindigkeit reitet, treffen sich unter-  
wegs in Z (Fig. 14.). 9 Stunden nach dieser Zusam-  
menkunft kommt der Hamburger schon in Berlin,  
aber erst 16 Stunden nach dieser Zusammenkunft  
der Berliner in Hamburg an. Wie geschwind ist  
jeder geritten?

§. 293.

§. 293.

Auflösung.

Man setze, daß jeder bis zur Zeit der Zusammenkunft  $x$  Stunden unterwegs gewesen sei; so ist einerlei Weg Z B von dem Hamburger in 9, von dem Berliner in  $x$  Stunden und ferner einerlei Weg Z H von dem Hamburger in  $x$ , von dem Berliner in 16 Stunden zurückgelegt; also verhält sich die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= x : 9$  (\*) und ferner auch die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= 16 : x$

folglich mus  $x : 9 = 16 : x$

daher  $x^2 = 9 \cdot 16 = 144$

und  $x = 12$  sein

Da nun Berlin von Hamburg 34 Meilen entfernt ist; so hat der Hamburger in  $x + 9$ , das ist,  $12 + 9$ , das ist in 21 Stunden 34 Meilen, folglich in Einer Stunde  $\frac{34}{21}$  Meilen; der Berliner aber erst in  $x + 16$ , das ist in 28 Stunden 34 Meilen, also in Einer Stunde nur  $\frac{34}{28}$  Meilen zurückgelegt.

N 2

Zwölfs

(\*) Denn wenn z. B. A eine Meile in Einer Stunde, B eine Meile in drei Stunden geht, so geht A dreimal geschwinder als B, und es verhält sich die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B nicht, wie 1 : 3, sondern umgekehrt, wie 3 : 1. Daher sagt man überhaupt, daß sich die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen umgekehrt verhalten, wie die Zeiten, in welchen gleiche Räume durchlaufen werden.

## Zwölftes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

#### Fortsetzung des sechsten Kapitels.

§. 294.

#### Siebenter Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ ; so ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , und  
 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 295.

#### Beweis.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist auch (sechster Lehrsatz)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , das  
 ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , daher alternan-

do  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 1 : 1$ ; folglich muß  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

sein, indem nur zwei gleiche Größen in dem Verhältnisse  $1 : 1$  stehen können; daher auch das Verhältniß  $1 : 1$ , oder welches einerlei ist,  $4 : 4$ ,  $11 : 11$ ,  $x : x$  das Verhältniß der Gleichheit (ratio æqualitatis) genannt wird.

Eben



## Zwölftes Kapitel. Lehrsätze N. 197

Eben so kan auch erwiesen werden, daß  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 296.

### Achter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$ , so ist

auch 2)  $a + b : b = c + d : d$

auch 3)  $a - b : b = c - d : d$

auch 4)  $a + c : c = b + d : d$

auch 5)  $a - c : c = b - d : d$

auch 6)  $b - a : a = d - c : c$

§. 297.

### Beweis.

Alle diese Proportionen sind richtig, wenn das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkte der innern. Es ist aber, z. B. in der bei 2) allerdings  $(a + b)d = (b + d)c$ , das ist,  $ad + cd = bc + dc$ , denn es ist  $ad = bc$  und  $cd = cd$ , und daß auch  $ad = bc$ , folgt aus der als richtig zum Grunde gelegten Proportion bei 1). Eben dieselbe Beweisart kan auch für eine jede von den übrigen Veränderungen angewandt werden.

§. 298.

### Neunter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = m : n$

und 2)  $p : q = m : n$

und 3)  $r : s = m : n$  so ist

auch  $a + p + r : b + q + s = m : n$ .

N 3

§. 299

## 190 Fünftes Kapitel. Auflösung

z. B.  $-3, 46$ , mit eben dem Rechte für die Wurzel von 12 angenommen werden, als  $+3, 46$ ; indem  $-3, 46 \cdot -3, 46 = + (3, 46 \cdot 3, 46)$  und überhaupt  $-\sqrt{p} \cdot -\sqrt{p} = +(\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}) = p$  ist.

§. 283.

So wie eine positive Zahl allemal 2 Quadratwurzeln hat; so kan es im Gegentheil für eine negative Zahl gar keine Quadratwurzel geben. Denn da z. B. von  $-25$  die Quadratwurzel entweder  $+5$  oder  $-5$  sein müste, so giebt doch weder  $+5 \cdot +5$  noch  $-5 \cdot -5$  das Produkt  $-25$ , sondern beides giebt  $+25$ . Wer demnach eine Quadratwurzel einer negativen Zahl fordert, der fordert etwas unmögliches; denn er verlangt, genau betrachtet, daß eine Zahl in sich selbst multiplicirt, oder zwei Zahlen von einerlei Größe und einerlei Zeichen in einander multiplicirt, ein negatives Produkt geben sollen, welches wider den §. 240. erwiesenen Lehrsatz streitet. Der Ausdruck  $\sqrt{-a}$ ,  $\sqrt{-1}$ , bedeutet daher eine unmögliche Größe, welche niemals angegeben werden kan. Dis hindert indessen nicht, daß nicht dergleichen Ausdrücke im algebraischen Kalkul oft mit Nutzen können gebraucht werden. Es ist. z. B. außer Zweifel, daß  $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$ , indem wir uns unter dem Ausdruck  $\sqrt{-a}$  eine solche Größe vorstellen, welche in sich selbst multiplicirt  $-a$  giebt. Daraus folgt

## der Ketten quadrat. Gleichungen. 191

folgt ferner, daß  $\sqrt{-a} = \frac{-a}{\sqrt{-a}}$  sei, und vergleichen.

§. 284.

### LX. Aufgabe.

Eine Zahl zu finden, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt 24 giebt.

§. 285.

### Auflösung.

Die gesuchte Zahl sei  $x$ , so mus sein  $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24$ ; oder  $x^2 = 24$ , daher  $x^2 = 144$ , und

$x = \pm \sqrt{144} = \pm 12$  (plus oder minus 12.)

Nehmen wir  $x = 12$ , so ist  $\frac{12}{2} \cdot \frac{12}{3} = 6 \cdot 4 = 24$ ,

Nehmen wir  $x = -12$ , so ist auch  $\frac{-12}{2} \cdot \frac{-12}{3} = -6 \cdot -4 = 24$ .

§. 286.

### LXI. Aufgabe.

Es wird eine Zahl gesucht, wenn man zu ihr  $a$ )  $a$  addirt,  $\beta$ ) von ihr  $a$  subtrahirt, daß das Produkt aus dieser Summe und Differenz  $= c$  sei.

§. 287.

Wenn  $x$  die gesuchte Zahl sein sol, so mus sie dergestalt genommen werden:

daß

## 192 Fünftes Kapitel. Auflösung.

daß  $(x+a)(x-a) = c$  sei

b. i.  $x^2 - a^2 = c$ , daher

auch  $x^2 = c + a^2$

und  $x = \pm \sqrt{c + a^2}$

Für  $c = 16$ , und  $a = 3$ , findet man  $x = \pm \sqrt{16 + 9} = \pm 5$ . Diese Zahl kan also sowohl  $+5$  als  $-5$  sein; und es ist allerdings sowohl  $1)(5+3) \cdot (5-3) = 16$ , als auch  $2)(-5+3) \cdot (-5-3) = -2 \cdot -8 = 16$ .

§. 288.

### LXII. Aufgabe.

Einige Kaufleute haben eingelegt, jeder 10 mal so viel Rthlr. als Personen sind, und gewinnen mit 100 Rthlr. zweimal so viel, als Personen sind: wenn man  $\frac{1}{10}$  Theil des ganzen Gewinnes durch  $2\frac{1}{2}$  multiplicirt, so kömte die Anzahl der Personen heraus. Wie viel Personen nehmen Theil am Handel?

§. 289.

### Auflösung.

Die unbekannte Anzahl der Personen sei  $x$ ; so hat jeder eingelegt  $10x$  Rthlr. alle  $x$  Personen haben demnach ein Kapital von  $10x^2$  Rthlr. zusammengebracht.

Nun verhält sich 100 Rthlr. zu  $10x^2$  Rthlr. wie der Gewinn von 100 Rthlr. nämlich  $2x$  Rthlr. zu dem Gewinne von  $10x^2$  Rthlr., welcher also  
nach

## der reinen quadrat. Gleichungen. 193

Nach  $100 : 10 x^2 = 2x : \frac{20 x^3}{100}$

$\frac{20 x^3}{100}$  oder  $x^3$  beträgt, so daß

sein sol  $\frac{x^3}{500} \cdot (2 + \frac{2}{5}) = x$ , also  $\frac{x^3}{4500} = 1$ ,

$x^3 = \frac{4500}{20} = 225$ , und  $x = \sqrt[3]{225} = + 15$

Antwort. Es sind 15 Personen gewesen. Hiemit kan die Probe leicht angestellt werden, und man wird finden, daß die Zahl + 15 alles leiste, was in der Aufgabe verlangt wird. Die andere Wurzel — 15, welche hier keinen schicklichen Sinn giebt, kan daher gänzlich aus der Acht gelassen werden.

§. 290.

### LXIV. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, welche in einander multiplicirt das Produkt  $22\frac{1}{2}$ , die eine in die andere dividirt den Quotienten  $2\frac{1}{2}$  geben.

§. 291.

Auflösung.

Man wird sich hier den Kalkül erleichtern, wenn man setzt  $22\frac{1}{2} = p$ , und  $2\frac{1}{2} = q$ . Setzt man nun ferner die eine gesuchte Zahl  $x$ , die andere  $y$ ; so mus sein

$$I) \ x y = p \quad , II) \ \frac{x}{y} = q.$$

N

Aus

## 194 Fünftes Kapitel. Auflösung

Aus der zweiten Gleichung folgt,  $x = q y$ .  
 Schreibt man nun in die erste Gleichung statt  $x$  die  
 gleichgültige Größe  $q y$ ; so erhält man  $q y^2 = p$ ,  
 eine Gleichung, worin nur noch die eine unbekannte  
 Größe  $y$  vorhanden ist. Es folgt daraus ferner,  
 daß  $y^2 = \frac{p}{q}$  folglich  $y = \pm \sqrt{\frac{p}{q}} = \pm \sqrt{\frac{45}{9}} = \pm \sqrt{5} = \pm 2\frac{1}{2}$   
 $= \pm 2\frac{1}{2}$

Nimmt man nun  $y = 3$ , so wird nach der  
 I. Gleichung  $x y = 45$ ,  $x = \frac{45}{3} = 15$ ,  
 und es ist in der That  $3 \cdot 15 = 45$  und  
 $15 : 3 = 5 = 2\frac{1}{2}$ .

Nimmt man aber auch  $y = -3$ , so wird  
 $x = \frac{45}{-3} = -15$  und ebenfalls  $-3 \cdot -15 = 45$   
 $= 45$ , und  $-15 : -3 = 5 = 2\frac{1}{2}$ .

§. 292.

### LXV. Aufgabe.

Zwei reitende Boten, welche zu gleicher Zeit  
 von Hamburg und Berlin ausgeritten sind, und  
 deren jeder seine ganze Reise hindurch immer mit  
 gleicher Geschwindigkeit reitet, treffen sich unter-  
 wegs in Z (Fig. 14.). 9 Stunden nach dieser Zusam-  
 menkunft kömmt der Hamburger schon in Berlin,  
 aber erst 16 Stunden nach dieser Zusammenkunft  
 der Berliner in Hamburg an. Wie geschwind ist  
 jeder geritten?

§. 293.

## der reinen quadrat. Gleichungen. 195

§. 293.

### Auflösung.

Man setze, daß jeder bis zur Zeit der Zusammenkunft  $x$  Stunden unterwegs gewesen sei; so ist einerlei Weg Z B von dem

Hamburger in 9, von dem Berliner in  $x$  Stunden und ferner einerlei Weg Z H von dem

Hamburger in  $x$ , von dem Berliner in 16 Stunden zurückgelegt; also verhält sich die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= x : 9$  (\*)

und ferner auch die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= 16 : x$

---

folglich mus  $x : 9 = 16 : x$

daher  $x^2 = 9 \cdot 16 = 144$

und  $x = 12$  sein

Da nun Berlin von Hamburg 34 Meilen entfernt ist; so hat der Hamburger in  $x + 9$ , das ist,  $12 + 9$ , das ist in 21 Stunden 34 Meilen, folglich in Einer Stunde  $\frac{34}{21}$  Meilen; der Berliner aber erst in  $x + 16$ , das ist in 28 Stunden 34 Meilen, also in Einer Stunde nur  $\frac{34}{28}$  Meilen zurückgelegt.

N 2

Zwölfe

(\*) Denn wenn z. B. A eine Meile in Einer Stunde, B eine Meile in drei Stunden geht, so geht A dreimal geschwinder als B, und es verhält sich die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B nicht, wie 1 : 3, sondern umgekehrt, wie 3 : 1. Daher sagt man überhaupt, daß sich die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen umgekehrt verhalten, wie die Zeiten, in welchen gleiche Räume durchlaufen werden.

## Zwölftes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

#### Fortsetzung des sechsten Kapitels.

§. 294.

#### Siebenter Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ ; so ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , und  
 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 295.

#### Beweis.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist auch (sechster Lehrsatz)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , das  
 ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , daher alternan-

do  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 1 : 1$ ; folglich muß  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

sein, indem nur zwei gleiche Größen in dem Verhältnisse  $1 : 1$  stehen können; daher auch das Verhältniß  $1 : 1$ , oder welches einerlei ist,  $4 : 4$ ,  $11 : 11$ ,  $x : x$  das Verhältniß der Gleichheit, (ratio aequalitatis) genannt wird.

Eben



## Zwölftes Kapitel. Lehrsätze R. 197

Eben so kan auch erwiesen werden, daß  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 296.

### Achter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$  so ist

2)  $a + b : b = c + d : d$

3)  $a - b : b = c - d : d$

4)  $a + c : c = b + d : d$

5)  $a - c : c = b - d : d$

6)  $\frac{a}{b} : \frac{a}{a} = \frac{d}{c} : \frac{d}{c}$

§. 297.

### Beweis.

Die ersten drei Proportionen sind richtig, wenn das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkt der innern. Es ist aber, z. B. in der bei 2) allerdings  $(a + b)d = (b + d)c$ , das ist,  $ad + cd = bc + dc$ , denn es ist  $ad = bc$  und  $cd = cd$ , und daß auch  $ad = bc$  folgt aus der als richtig zum Grunde gelegten Proportion bei 1). Eben dieselbe Beweisart kan auch für eine jede von den übrigen Veränderungen angewandt werden.

§. 298.

### Neunter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = m : n$

und 2)  $p : q = m : n$

und 3)  $r : s = m : n$  so ist

auch  $a + p + r : b + q + s = m : n$ .

N 3

§. 299

## 198 Zwölftes Kapitel. Lehrsätze

§. 299.

Beweis.

Es ist nur die Frage, ob  $(a + p + r)n$   
 $= (b + q + s)m$ ,

das ist  $an + pn + rn = bm + qm + sm$ ;  
 welches zu bejahen ist, da aus der Proportion bei  
 1) folgt, daß  $an = bm$ , aus der bei  
 2) — — —  $pn = qm$  — — —  
 3) — — —  $rn = sm$ .

§. 300.

Es folgt auch aus den Proportionen bei  
 1) 2) 3), daß

auch  $a - p - r : b - q - s = m : n$

auch  $a + p - r : b + q - s = m : n$ .

Denn wenn 1)  $an = bm$

2)  $pn = qm$

3)  $rn = sm$  so mus

auch  $an - pn - rn = bm - qm - sm$

auch  $an + pn - rn = bm + qm - sm$

sein.

§. 301.

Zehnter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$

und 2)  $p : q = r : s$

und 3)  $g : h = i : k$ ; so ist

auch  $apg : bqh = cri : dsk$ .

§. 302.

# der geometrischen Proportionen 199

§. 302.

Beweis.

Es mus  $a p g . d s k = b q h . c r i$   
bejaht werden. Denn da

aus 1) folgt daß  $a d = b c$

aus 2) — —  $p s = q r$

so mus auch  $a d p s = b c q r$  sein (§. 54)  
und da aus 3) folgt daß  $r n = s m$

so mus auch  $a d p s r n = b c q r s m$  sein (§. 54.)

§. 303.

Die Proportion bei 4) entstand aus den 3 vorhergehenden Proportionen, indem die einzelnen gleichnamigen Glieder dieser 3 Proportionen in einander multiplicirt wurden, und man sagt alsdan, daß die Proportion bei 4) eine aus den 3 Proportionen bei 1) 2) 3) zusammengesetzte Proportion sei. Eben so heißt auch das Verhältniß 2. 4 : 3. 9 eine aus den beiden Verhältnissen 2 : 3 und 4 : 9 zusammengesetzte Verhältniß.

§. 304.

Filfter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : \beta = m : q$

2)  $\beta : \gamma = r : s$

3)  $\gamma : \delta = n : p$

4)  $\delta : b = f : g$ ; so ist

auch 5)  $a : b = m r n f : q s p g$

N 4

§. 305.

§. 305.

B e w e i s.

Es ist  $a \beta \gamma \delta : \beta \gamma \delta b = m r n f : q s p g$   
(eingaus dehen hier bei 1) 2) 3) 4) zusammengesetzte  
Proportion, §. 303.); folglich ist auch.

$$(\S. 93.) \frac{a \beta \gamma \delta}{\beta \gamma \delta} : \frac{\beta \gamma \delta b}{\beta \gamma \delta} = m r n f : q s p g$$

$$\text{Das ist, (5) } a : b = m r n f : q s p g.$$

§. 306.

Hier ist nun das Verhältnis  $a : b$  aus den  
vier Verhältnissen  $m : q$ ,  $r : s$ ,  $n : p$  und  $f : g$  zu-  
sammengesetzt; und aus der Zusammenhaltung die-  
ser Proportion bei 5) mit denen bei 1) 2) 3) 4) läßt  
sich gar leicht ein allgemeines Mittel entdecken, wie  
man umgekehrt ein jedes zusammengesetztes Ver-  
hältnis in seine einzelnen Verhältnisse auflösen  
konne. Da z. B. in der Proportion  $a : g = m r : p q$   
das Verhältnis  $a : g$  aus den beiden  $m : p$  und  $r : q$   
zusammengesetzt ist; so ist, wenn man  $\delta$  dergestalt  
annimmt

$$\text{daß 1) } a : \delta = m : p,$$

$$\text{und 2) } \delta : g = r : q \text{ wird, hiemit das} \\ \text{Verhältnis } a : g \text{ aufgelöst in } a : \delta, \text{ welches } = m : p \\ \text{und } \delta : g, \text{ welches } = r : q$$

Um sich davon zu überzeugen, daß es allemal  
eine solche Zahl  $\delta$  gebe, welche das Wertangte lei-  
stet, so darf man nur bedenken, daß die Pro-  
tion

bei 1)

$$a : \delta = m : p \quad a : g = m r : p q$$

$$a : g = m r : p q \quad a : \delta = m : p$$

$$a : g = m r : p q \quad a : \delta = m : p$$

# der geometrischen Proportionen. 201

bei 1) richtig ist; wenn genommen wird  $\delta = \frac{ap}{m}$  (\*)

und die

bei 2) richtig ist; wenn genommen wird  $\delta = \frac{gr}{q}$  (\*\*)

Es mus aber nun allemal  $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$  sein, in-

dem aus der zum Grunde gelegten Proportion  $a : g = m : r : p : q$  folgt, daß  $apq = gmr$ ; folglich auch  $\frac{apq}{qm} = \frac{gmr}{qm}$  ist, das ist  $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$ .

§. 307.

Eben so ist in der Proportion  $a : b = m : n : p : q : r : x$  das Verhältniß  $a : b$  ein aus  $m : p : n : q : r$  und  $1 : x$  zusammengesetztes Verhältniß, welches in diese einzelne Verhältnisse aufgelöst wird, indem man  $\beta, \gamma, \delta$  dergestalt annimmt, daß

$$a : \beta = m : p$$

$$\beta : \gamma = n : q$$

$$\gamma : \delta = 1 : r$$

$$\delta : b = 1 : x \text{ wird.}$$

(\*) Denn es ist  $m : p = a : \frac{ap}{m}$ , folglich auch

anteponendo (§. 189.)  $a : \frac{ap}{m} = m : p$ .

(\*\*) Denn es ist  $q : r = g : \frac{gr}{q}$ , folglich auch

relegendo (§. 189.)  $\frac{gr}{q} : g = r : q$ .

## 194 Fünftes Kapitel. Auflösung

Aus der zweiten Gleichung folgt,  $x = q y$ . Schreibt man nun in die erste Gleichung statt  $x$  die gleichgültige Größe  $q y$ ; so erhält man  $q y^2 = p$ , eine Gleichung, worin nur noch die eine unbekannte Größe  $y$  vorhanden ist. Es folgt daraus ferner, daß  $y^2 = \frac{p}{q}$  folglich  $y = \pm \sqrt{\frac{p}{q}} = \pm \sqrt{45 : 9}$

$$= \pm \sqrt{\frac{45 \cdot 2}{5 \cdot 2}} = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$$

Nimmt man nun  $y = 3$ , so wird nach der I. Gleichung  $x y = 45$ ,  $x = \frac{45}{3} = 15$ , und es ist in der That  $3 \cdot 15 = 45$  und  $15 : 3 = 5 = 2\frac{1}{2}$ .

Nimmt man aber auch  $y = -3$ , so wird  $x = \frac{45}{-3} = -15$  und ebenfalls  $-3 \cdot -15 = 45$  und  $-15 : -3 = 5 = 2\frac{1}{2}$ .

§. 292.

### LXV. Aufgabe.

Zwei reitende Boten, welche zu gleicher Zeit von Hamburg und Berlin ausgeritten sind, und deren jeder seine ganze Reise hindurch immer mit gleicher Geschwindigkeit reitet, treffen sich unterwegs in Z (Fig. 14.). 9 Stunden nach dieser Zusammenkunft kömmt der Hamburger schon in Berlin, aber erst 16 Stunden nach dieser Zusammenkunft der Berliner in Hamburg an. Wie geschwind ist jeder geritten?

§. 293.

## der reinen quadrat. Gleichungen. 195

§. 293.

### Auflösung.

Man setze, daß jeder bis zur Zeit der Zusammenkunft  $x$  Stunden unterwegs gewesen sei; so ist einerlei Weg Z B von dem

Hamburger in 9, von dem Berliner in  $x$  Stunden und ferner einerlei Weg Z H von dem

Hamburger in  $x$ , von dem Berliner in 16 Stunden zurückgelegt; also verhält sich die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= x:9$  (\*)

und ferner auch die Geschwindigkeit des H. zur Geschwindigkeit des B.  $= 16:x$

---

folglich mus  $x:9 = 16:x$

daher  $x^2 = 9 \cdot 16 = 144$

und  $x = 12$  sein

Da nun Berlin von Hamburg 34 Meilen entfernt ist; so hat der Hamburger in  $x+9$ , das ist,  $12+9$ , das ist in 21 Stunden 34 Meilen, folglich in Einer Stunde  $\frac{34}{21}$  Meilen; der Berliner aber erst in  $x+16$ , das ist in 28 Stunden 34 Meilen, also in Einer Stunde nur  $\frac{34}{28}$  Meilen zurückgelegt.

N 2

Zwölfe

(\*) Denn wenn z. B. A eine Meile in Einer Stunde, B eine Meile in drei Stunden geht, so geht A dreimal geschwinder als B, und es verhält sich die Geschwindigkeit des A zur Geschwindigkeit des B nicht, wie 1:3, sondern umgekehrt, wie 3:1. Daher sagt man überhaupt, daß sich die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen umgekehrt verhalten, wie die Zeiten, in welchen gleiche Räume durchlaufen werden.

## Zwölftes Kapitel.

### Lehrsätze der geometrischen Proportionen.

#### Fortsetzung des sechsten Kapitels.

§. 294.

#### Siebenter Lehrsatz.

Wenn  $a : b = c : d$ ; so ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , und  
 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 295.

#### Beweis.

Wenn  $a : b = c : d$ , so ist auch (sechster Lehrsatz)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , das  
 ist  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , daher alternan-

do  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 1 : 1$ ; folglich muß  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

sein, indem nur zwei gleiche Größen in dem Verhältnisse  $1 : 1$  stehen können; daher auch das Verhältniß  $1 : 1$ , oder welches einerlei ist,  $4 : 4$ ,  $11 : 11$ ,  $x : x$  das Verhältniß der Gleichheit, (ratio aequalitatis) genannt wird.

Eben-



## Zweytes Kapitel. Lehrsätze R. 197

Eben so kan auch erwiesen werden, daß  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ .

§. 296.

### Achter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$  so ist  
 auch 2)  $a + b : b = c + d : d$   
 auch 3)  $a - b : b = c - d : d$   
 auch 4)  $a : b + d = c : d$   
 auch 5)  $a : b - d = c : d$   
 auch 6)  $d : c = b : a$

§. 297.

### Beweis.

in) Alle diese Proportionen sind richtig, wenn das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkte der innern. Es ist aber, z. B. in der bei 2) allerdings  $(a + b)d = (b + d)c$ , das ist,  $ad + cd = bc + dc$ , denn es ist  $ad = bc$  und  $cd = cd$ , und daß auch  $ad = bc$ , folgt aus der als richtig zum Grunde gelegten Proportion bei 1). Eben dieselbe Beweisart kan auch für eine jede von den übrigen Veränderungen angewandt werden.

§. 298.

### Neunter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = m : n$   
 und 2)  $p : q = m : n$   
 und 3)  $r : s = m : n$  so ist

auch  $a + p + r : b + q + s = m : n$ .

§. 299

N 3

§. 299

## 198 Zwölftes Kapitel. Lehrsätze

§. 299.

Beweis.

Es ist nur die Frage, ob  $(a + p + r)n$   
 $= (b + q + s)m$ ,

das ist  $an + pn + rn = bm + qm + sm$ ;  
 welches zu bejahen ist, da aus der Proportion bei  
 1) folgt, daß  $an = bm$ , aus der bei  
 2) — — —  $pn = qm$  — — —  
 3) — — —  $rn = sm$ .

§. 300.

Es folgt auch aus den Proportionen bei  
 1) 2) 3), daß

auch  $a - p - r : b - q - s = m:n$

auch  $a + p - r : b + q - s = m:n$ .

Denn wenn 1)  $an = bm$

2)  $pn = qm$

3)  $rn = sm$  so mus

auch  $an - pn - rn = bm - qm - sm$

auch  $an + pn - rn = bm + qm - sm$

sein.

§. 301.

Zehnter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$

und 2)  $p : q = r : s$

und 3)  $g : h = i : k$ ; so ist

auch  $apg : bqh = cri : dsk$ .

§. 302.

# der geometrischen Proportionen 199

§. 302.

Beweis.

Es mus  $a p g . d s k = b q h . c r i$   
bejaht werden. Denn da

aus 1) folgt daß  $a d = b c$

aus 2) — —  $p s = q r$

so mus auch  $a d p s = b c q r$  sein (§. 54)  
und da aus 3) folgt daß  $r n = s m$

so mus auch  $a d p s r n = b c q r s m$  sein (§. 54.)

§. 303.

Die Proportion bei 4) entstand aus den 3 vorhergehenden Proportionen, indem die einzelnen gleichnamigen Glieder dieser 3 Proportionen in einander multiplicirt wurden, und man sagt alsdan, daß die Proportion bei 4) eine aus den 3 Proportionen bei 1) 2) 3) zusammengesetzte Proportion sei. Eben so heist auch das Verhältniß 2. 4 : 3. 9 eine aus den beiden Verhältnissen 2 : 3 und 4 : 9 zusammengesetzte Verhältniß.

§. 304.

Fünfter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : \beta = m : q$

2)  $\beta : \gamma = r : s$

3)  $\gamma : \delta = n : p$

4)  $\delta : b = f : g$ ; so ist

auch 5)  $a : b = m r n f : q s p g$

N 4

§. 305.

## 200 Zwölftes Kapitel. Behauptungen

§. 305.

Beweis.

Es ist  $a \beta \gamma \delta : \beta \gamma \delta b = m r n f : q s p g$   
(eins aus denen vier bei 1) 2) 3) 4) zusammengesetzte  
Proportion, §. 303.); folglich ist auch.

$$(\S. 93.) \frac{a \beta \gamma \delta}{\beta \gamma \delta} : \frac{\beta \gamma \delta b}{\beta \gamma \delta} = m r n f : q s p g$$

$$\text{Das ist, (4) } a : b = m r n f : q s p g.$$

§. 306.

Hier ist nun das Verhältnis  $a : b$  aus den  
vier Verhältnissen  $m : q$ ,  $r : s$ ,  $n : p$  und  $f : g$  zu-  
sammengesetzt, und aus der Zusammenhaltung die-  
ser Proportion bei 5) mit denen bei 1) 2) 3) 4) läßt  
sich gar leicht ein allgemeines Mittel entdecken, wie  
man umgekehrt ein jedes zusammengesetztes Ver-  
hältnis in seine einzelnen Verhältnisse auflösen  
könne. Da z. B. in der Proportion  $a : g = m r : p q$   
das Verhältnis  $a : g$  aus den beiden  $m : p$  und  $r : q$   
zusammengesetzt ist; so ist, wenn man  $\delta$  dergestalt  
annimmt

$$\text{daß 1) } a : \delta = m : p,$$

$$\text{und 2) } \delta : g = r : q \text{ wird, hiemit das} \\ \text{Verhältnis } a : g \text{ aufgelöst in } a : \delta, \text{ welches } = m : p \\ \text{und } \delta : g, \text{ welches } = r : q$$

Um sich davon zu überzeugen, daß es allemal  
eine solche Zahl  $\delta$  gebe, welche das Verlangte lei-  
stet, so darf man nur bedenken, daß die Pro-  
tion

bei 1)

$$a : \delta = m : p$$

$$a : g = m r : p q$$

$$a : \delta = m : p$$

$$a : g = m r : p q$$

$$a : \delta = m : p$$

$$a : g = m r : p q$$

## der geometrischen Proportionen. 201

bei 1) richtig ist; wenn genommen wird  $\delta = \frac{a p}{m}$  (\*)

und die  
bei 2) richtig ist; wenn genommen wird  $\delta = \frac{g r}{q}$  (\*\*)

Es mus aber nun allemal  $\frac{a p}{m} = \frac{g r}{q}$  sein, in-  
dem aus der zum Grunde gelegten Proportion  $a : g$   
 $= m r : p q$  folgt, daß  $a p q = g m r$ ; folglich  
auch  $\frac{a p q}{q m} = \frac{g m r}{q m}$  ist, das ist  $\frac{a p}{m} = \frac{g r}{q}$ .

§. 307.

Eben so ist in der Proportion  $a : b = m : n$   
 $: p q r x$  das Verhältniß  $a : b$  ein aus  $m : p, n : q,$   
 $1 : r$  und  $1 : x$  zusammengesetztes Verhältniß, wel-  
ches in diese einzelne Verhältnisse aufgelöst wird,  
indem man  $\beta, \gamma, \delta$  dergestalt annimmt, daß

$$a : \beta = m : p$$

$$\beta : \gamma = n : q$$

$$\gamma : \delta = 1 : r$$

$$\delta : b = 1 : x \text{ wird.}$$

(\*) Denn es ist  $m : p = a : \frac{a p}{m}$ , folglich auch

anteponendo (§. 189.)  $a : \frac{a p}{m} = m : p$ .

(\*\*) Denn es ist  $q : r = g : \frac{g r}{q}$ , folglich auch

relegendo (§. 189.)  $\frac{g r}{q} : g = r : q$ .

N 5

§. 308.

§. 311

Ähnliche Weise ergibt sich, wenn  
 $a : b = c : d$   
 mit  $a : b = e : d$   
 und  $a : b = c : d$  zusammengesetzt wird,

daß auch  $aaa : bbb = ccc : ddd$ , oder indem  
 man der Bequemlichkeit wegen  $a^3$  stat  $aaa$ ,  $b^3$   
 stat  $bbb$  x. schreibt, daß auch  $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ ,  
 welches man, da  $x^3$  die Kubikzahl von  $x$ , genant  
 wird, ausdrücken wil, wenn man sagt, daß auch  
 die Kubikzahlen von proportionalen Größen pro-  
 portional sind.

§. 312.

Durch die §. 310. angewandte Schlusart kan  
 auch bewiesen werden, daß

$$\text{wenn } p : q = m : n$$

auch  $\sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$  sein müsse;  
 wo der Ausdruck  $\sqrt[3]{p}$  die Kubikwurzel von  $p$  an-  
 zeigt, so daß  $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} = p$ .

§. 313.

Wir haben zwar bei den bisher vorgetragten  
 Lehren der geometrischen Proportionen die Glieder  
 derselben nur als absolute Größen angesehen, ohne  
 auf die entgegengesetzte Beziehung zu achten, worin  
 die positiven und negativen algebraischen Größen  
 stehen:

# der geometrischen Proportionen. 205

stehen: es wird aber keine Schwierigkeit machen, auch solche Proportionen, worin auf die Zeichen + und — der einzelnen Glieder Rücksicht genommen wird, richtig zu behandeln; wenn wir nur die §. 240. und §. 243. ausgeführten Lehrsätze beständig vor Augen behalten. Nach denselben mus nämlich:

$$\text{in } +a : +b = +c : \dots d, \dots d = \frac{+b \cdot +c}{+a} = +bc = +d$$

$$\text{in } +a : -b = +c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot +c}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

$$\text{in } +a : +b = -c : \dots d, \dots d = \frac{+b \cdot -c}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

$$\text{in } +a : -b = -c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot -c}{+a} = \frac{+bc}{+a} = +\frac{bc}{a} = +d$$

$$\text{in } -a : -b = -c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot -c}{-a} = \frac{+bc}{-a} = -\frac{bc}{a} = -d \text{ sein u. d.}$$

## 198 Zwölftes Kapitel. Lehrsätze

§. 299.

Beweis.

Es ist nur die Frage, ob  $(a + p + r)n$   
 $= (b + q + s)m$ ,

das ist  $an + pn + rn = bm + qm + sm$ ;  
 welches zu bejahen ist, da aus der Proportion bei  
 1) folgt, daß  $an = bm$ , aus der bei  
 2) — — —  $pn = qm$  — — —  
 3) — — —  $rn = sm$ .

§. 300.

Es folgt auch aus den Proportionen bei  
 1) 2) 3), daß

auch  $a - p - r : b - q - s = m : n$

auch  $a + p - r : b + q - s = m : n$ .

Denn wenn 1)  $an = bm$

2)  $pn = qm$

3)  $rn = sm$  so mus

auch  $an - pn - rn = bm - qm - sm$

auch  $an + pn - rn = bm + qm - sm$   
 sein.

§. 301.

Zehnter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : b = c : d$

und 2)  $p : q = r : s$

und 3)  $g : h = i : k$ ; so ist

auch  $apg : bqh = cri : dsk$ .

§. 302.



# der geometrischen Proportionen 199

§. 302.

Beweis.

Es mus  $a p g . d s k = b q h . c r i$   
bejaht werden. Denn da

aus 1) folgt daß  $a d = b c$

aus 2) — —  $p s = q r$

so mus auch  $a d p s = b c q r$  sein (§. 54)  
und da aus 3) folgt daß  $r n = s m$

so mus auch  $a d p s r n = b c q r s m$  sein (§. 54.)

§. 303.

Die Proportion bei 4) entstand aus den 3 vorhergehenden Proportionen, indem die einzelnen gleichnamigen Glieder dieser 3 Proportionen in einander multiplicirt wurden, und man sagt alsdan, daß die Proportion bei 4) eine aus den 3 Proportionen bei 1) 2) 3) zusammengesetzte Proportion sei. Eben so heist auch das Verhältniß 2. 4 : 3. 9 eine aus den beiden Verhältnissen 2 : 3 und 4 : 9 zusammengesetzte Verhältniß.

§. 304.

Filfter Lehrsatz.

Wenn 1)  $a : \beta = m : q$

2)  $\beta : \gamma = r : s$

3)  $\gamma : \delta = n : p$

4)  $\delta : b = f : g$ ; so ist

auch 5)  $a : b = m r n f : q s p g$

Q 4

§. 305.

## 200 Zwölftes Kapitel: Behauptungen

§. 305.

Beweis.

Es ist  $a \beta \gamma \delta : \beta \gamma \delta b = m r n f : q s p g$   
(eines aus denen hier bei 1) 2) 3) 4) zusammengesetzte  
Proportion, §. 303.); folglich ist auch.

$$(\S. 93.) \frac{a \beta \gamma \delta}{\beta \gamma \delta} : \frac{\beta \gamma \delta b}{\beta \gamma \delta} = m r n f : q s p g$$

Das ist, (5)  $a : b = m r n f : q s p g$ .

§. 306.

Hier ist nun das Verhältnis  $a : b$  aus den  
vier Verhältnissen  $m : q$ ,  $r : s$ ,  $n : p$  und  $f : g$  zu-  
sammengesetzt; und aus der Zusammenhaltung die-  
ser Proportion bei 5) mit denen bei 1) 2) 3) 4) läßt  
sich gar leicht ein allgemeines Mittel entdecken, wie  
man umgekehrt ein jedes zusammengesetztes Ver-  
hältnis in seine einzelnen Verhältnisse auflösen  
könne. Da z. B. in der Proportion  $a : g = m r : p q$   
das Verhältnis  $a : g$  aus den beiden  $m : p$  und  $r : q$   
zusammengesetzt ist; so ist, wenn man  $\delta$  dergestalt  
annimmt

daß 1)  $a : \delta = m : p$

und 2)  $\delta : g = r : q$  wird, hiemit das  
Verhältnis  $a : g$  aufgelöst in  $a : \delta$ , welches  $= m : p$   
und  $\delta : g$ , welches  $= r : q$

Um sich davon zu überzeugen, daß es allemal  
eine solche Zahl  $\delta$  gebe, welche das Wertangte lei-  
stet, so darf man nur bedenken, daß die Pro-  
tion

bei 1)

$$a : \delta = m : p$$

$$a : \delta = m : p$$

$$a : \delta = m : p$$

# der geometrischen Proportionen. 201

bei 1) richtig ist; wenn genommen wird  $d = \frac{ap}{m}$  (\*)

und die

bei 2) richtig ist; wenn genommen wird  $d = \frac{gr}{q}$  (\*\*)

Es mus aber nun allemal  $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$  sein, in-

dem aus der zum Grunde gelegten Proportion  $a : g = mr : pq$  folgt, daß  $apq = gmr$ ; folglich auch  $\frac{apq}{qm} = \frac{gmr}{qm}$  ist, das ist  $\frac{ap}{m} = \frac{gr}{q}$ .

§. 307.

Eben so ist in der Proportion  $a : b = m : n$  :  $pqr : x$  das Verhältniß  $a : b$  ein aus  $m : p$ ,  $n : q$ ,  $r : x$  und  $1 : 1$  zusammengesetztes Verhältniß, welches in diese einzelne Verhältnisse aufgelöst wird, indem man  $\beta, \gamma, \delta$  dergestalt annimmt, daß

$$a : \beta = m : p$$

$$\beta : \gamma = n : q$$

$$\gamma : \delta = r : x$$

$$\delta : b = 1 : 1 \text{ wird.}$$

(\*) Denn es ist  $m : p = a : \frac{ap}{m}$ , folglich auch

antepomendo (§. 189.)  $a : \frac{ap}{m} = m : p$ .

(\*\*) Denn es ist  $q : r = g : \frac{gr}{q}$ , folglich auch

relegendo (§. 189.)  $\frac{gr}{q} : g = r : q$ .

N 5

§. 308.

## 202 Zwölftes Kapitel. Lehrsätze

§. 308.

Wenn ich daher hätte  $C : c = DP : dp$ , (welches z. B. nach geometrischen Beweisen richtig ist; wenn  $C$  die Zahl der Maße in einer Cirkelfläche,  $D$  die Zahl ihres Diameters, und  $P$  die Zahl ihrer Peripherie,  $c$  aber die Zahl der Maße in einer andern Cirkelfläche,  $d$  die Zahl des Diameters, und  $p$  die Zahl der Peripherie dieses Cirkels ausdrückt) und nun wüßte, daß  $D : d = P : p$  wäre. (Num. 48.); so könnte ich auch in der zusammengesetzten Verhältnis, stat des Verhältnisses  $P : p$  das Verhältnis  $C : c$  schreiben, und würde dadurch auf den bekanten Satz kommen, daß  $C : c = DD : dd$  sei, oder daß 2 Cirkelflächen sich verhalten; wie die Quadrate ihrer Diameter. Um sich hievon vollkommen deutlich zu überzeugen; so löse man das Verhältnis  $C : c$  auf.

in 1)  $C : k = D : d$

2)  $k : c = P : p$ ; so ist nun offenbar, daß ich in 2) stat  $P : p$  schreiben kan, das gleiche Verhältnis  $D : d$ , wodurch ich erhalte 3)  $k : c = D : d$ , welche Proportion mit der bei 1) zusammengesetzt giebt  $C : c = DD : dd$ .

§. 309.

Die Proportion  $a : b = c : d$  zusammen-  
gesetzt mit  $a : b = c : d$   
giebt  $\frac{a^2 : b^2 = c^2 : d^2}{}$

woraus wir den allgemeinen Schluß ziehen, daß auch die Quadratzahlen von vier proportionalen Zahlen proportional sind.

# der geometrischen Proportionen. 203

§. 310.

Auch kan man erweisen, daß umgekehrt die Quadratwurzeln von proportionalen Zahlen proportional sein müssen. Ich sage z. B.

wenn  $m : n = p : q$  so mus

auch  $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$  sein.

Denn es ist  $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$

und  $\sqrt{m} : \sqrt{n} = \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$

folglich auch (§. 301.)

$$\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} : \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p} : \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}}$$

das ist  $m : n = p : \frac{np}{m}$

da nun  $m : n = p : q$  als richtig angenommen ist, so mus  $q = \frac{np}{m}$ , folglich auch

$$q = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}}, \text{ also da } q = \sqrt{q} \cdot \sqrt{q}$$

$$\text{ist, mus auch } \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}} = \sqrt{q} \cdot \sqrt{q}$$

sein, welches ohnmöglich stat finden könnte, wenn nicht  $\frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{m}} = \sqrt{q}$  wäre.

§. 311.

§. 311

Ähnliche Weise ergibt sich, wenn  
 $a : b = c : d$   
 mit  $a : b = e : d$   
 und  $a : b = c : d$  zusammengesetzt wird,

daß auch  $aaa : bbb = ccc : ddd$ , oder indem  
 man der Bequemlichkeit wegen  $a^3$  stat  $aaa$ ,  $b^3$   
 stat  $bbb$  x. schreibt, daß auch  $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ ,  
 welches man, da  $x^3$  die Kubikzahl von  $x$ , genannt  
 wird, ausdrücken wil, wenn man sagt, daß auch  
 die Kubikzahlen von proportionalen Größen pro-  
 portional sind.

§. 312.

Durch die §. 310. angewandte Schlussart kan  
 auch bewiesen werden, daß

wenn  $p : q = m : n$

auch  $\sqrt[3]{p} : \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}$  sein müsse;

wo der Ausdruck  $\sqrt[3]{p}$  die Kubikwurzel von  $p$  an-

zeigt, so daß  $\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[3]{p} = p$ .

§. 313.

Wir haben zwar bei den bisher vorgetragten  
 Lehren der geometrischen Proportionen die Glieder  
 derselben nur als absolute Größen angesehen, ohne  
 auf die entgegengesetzte Beziehung zu achten, worin  
 die positiven und negativen algebraischen Größen  
 stehen:

# Der geometrischen Proportionen. 205

stehen: es wird aber keine Schwierigkeit machen, auch solche Proportionen, worin auf die Zeichen + und — der einzelnen Glieder Rücksicht genommen wird, richtig zu behandeln; wenn wir nur die §. 240. und §. 243. ausgeführten Lehrsätze beständig vor Augen behalten. Nach denselben mus nämlich in  $+a : +b = +c : \dots d$ ,  $d = \frac{+b \cdot +c}{+a} =$

$$+ \frac{bc}{a} = +d$$

$$\text{in } +a : -b = +c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot +c}{+a}$$

$$= -\frac{bc}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

$$\text{in } +a : +b = -c : \dots d, \dots d = \frac{+b \cdot -c}{+a}$$

$$= -\frac{bc}{+a} = -\frac{bc}{a} = -d$$

$$\text{in } +a : -b = -c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot -c}{+a}$$

$$= +\frac{bc}{+a} = +\frac{bc}{a} = +d$$

$$\text{in } -a : -b = -c : \dots d, \dots d = \frac{-b \cdot -c}{-a}$$

$$= +\frac{bc}{-a} = -\frac{bc}{a} = -d \text{ sein u. d.}$$

## §. 314.

Es ist allgemein eingeführt diejenige Proportion, deren Gesetze wir aus der von ihr §. 174. gegebenen Erklärung bisher entwickelt haben, eine geometrische Proportion zu nennen, zum Unterschiede von einer andern so genannten arithmetischen Proportion, wovon wir in der Folge handeln werden. Man sagt nämlich z. B. daß die vier Zahlen 3, 5, 8, 10 in einer arithmetischen Proportion stehen, in welcher das 2te Glied um eben so viel größer ist, als das 1ste, um so viel das 4te Glied größer ist, als das 3te; da hingegen folgende Zahlen  $3 : 5 = 8 : 13\frac{1}{3}$  in einer geometrischen Proportion stehen würden, in welcher das 2te Glied so viele male größer ist, als das erste; so viele male das 4te Glied größer ist, als das 2te.

## §. 315.

## Frage.

Wenn  $a : b = c : d$ , ist alsdan auch  $a + c : b = c + b : d$ ?

## §. 316.

## Beantwortung.

?

Wenn 1)  $a + c : b = c + b : d$  bejaßt werden sollte; so müßte folgende Fragegleichung  
2)



2)  $ad + cd = bc + bb$  bejahet werden können, (dritter Lehrsatz S. 185.). Da nun ferner aus der angenommenen Proportion  $a : b = c : d$  folgt, daß  $ad = bc$ ; so wird zur Bejahung dieser Fragen bei 2) nothwendig erfordert, daß auch  $cd = bb$ , folglich  $b = \sqrt{cd}$  sei, und nur in diesem Falle kan die angegebne Veränderung vorgenommen werden. So wird z. B. da  $2 + \frac{2}{3} : 6 = 4 : 9$ , und  $6 = \sqrt{4 \cdot 9}$  ist, allerdings auch  $2 + \frac{2}{3} + 4 : 6 = 4 + 6 : 9$  sein.

Auf diese Weise kan man allemal eine sichere Prüfung anstellen, ob eine gemachte Veränderung mit einer oder mehreren Proportionen überhaupt richtig sei, oder nicht, und auch die besondern Bedingungen entdecken, unter welchen sie geschehen kan.

Während des Unterrichtes in den Lehren dieses Kapitels sind zugleich die geometrischen Lehrsätze von Num. 43 . . . 49 vorgetragen.



## Dreizehntes Kapitel.

### Auflösung geometrischer Aufgaben.

§. 317.

#### LXVI. Aufgabe.

**M**itte drei Seiten des Triangels  $ABC$  (Fig. 13.) sind gegeben. Aus der Spitze  $C$  fällt auf die entgegenstehende Seite  $AB$  eine Normallinie  $CD$ , welche diese Seite  $AB$  in die beiden Theile  $AD$  und  $DB$  zerschneidet; man sol diese beiden Abschnitte finden.

§. 318.

#### Auflösung.

Es sei  $AC = a$ ;  $BC = c$ ,  $AB = b$ , der größere Abschnit  $DB = x$ , so ist der kleinere  $AD = b - x$ , und nach (Num. 35.) wird sein

$$a^2 - (b - x)^2 = CD^2$$

$$\text{und da auch } c^2 - x^2 = CD^2$$

$$\text{so ist } a^2 - (b - x)^2 = c^2 - x^2$$

$$\text{dergleichen } a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = c^2 - x^2$$

$$\text{oder (§. 246.) } a^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - x^2$$

$$\text{daher } a^2 - b^2 + 2bx = c^2.$$

und

$$2bx = b^2 + c^2 - a^2$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$x = \frac{b}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

§. 319.

§. 319.

Sind nun die Größen der Seiten in Zahlen gegeben, als  $a = 6$ ,  $b = 7$ ,  $c = 8$ , so findet man nach dieser Formel auch den Abschnitt  $x$  in Zahlen, nämlich  $x = \frac{7}{2} + \frac{64 - 36}{2 \cdot 8} = \frac{7}{2} + \frac{14}{16} = 5\frac{1}{2}$ , folglich den andern Abschnitt  $b - x = 7 - 5\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

§. 320.

Wären aber die Seiten des Triangels in ungemessenen Linien gegeben, so kan man auch durch geometrische Operationen die Linie  $x$  finden; wenn man bedenkt, daß  $\frac{c^2 - a^2}{2b} = \frac{(c + a)(c - a)}{2b}$  (§. 251.)

Man finde nämlich nach der Proportion,  $\frac{2b}{c + a} = \frac{c - a}{L}$ , oder wenn die Linien  $2b$  und  $c + a$  gar zu groß sein sollten, nach folgender,  $b : \frac{c + a}{2} = c - a : L$ , die Linie  $L$ ; so wird  $L = \frac{(c + a)(c - a)}{2b}$  und  $\frac{b}{2} + L = x$  das gesuchte größte Segment  $BD$  sein.

§. 321.

Wenn in dem gegebenen Dreieck wäre  $AC = BC$ , also  $a = c$ , so wird, indem man nun  $c$  für  $a$  schreiben kan,  $x = \frac{b}{2} + \frac{c^2 - c^2}{2b} = \frac{b}{2} + 0$ ; welches vollkommen mit dem Lehrsatz der Geometrie übereinstimmt.

übereinstimt, daß eine aus der Spitze eines gleichschenkligen Triangels auf die Grundlinie gefällte Perpendikulairlinie die Grundlinie in zwei gleiche Theile zertheilet.

§. 322.

### LXVII. Aufgabe.

Es wird der Perimeter eines rechtwinklichten Dreieks und der Perpendikel gegeben, welcher aus der Spitze des rechten Winkels auf die größte Seite fällt; man soll diese größte Seite finden.

§. 323.

### Vorbereitung.

Es sei Fig. 19. der Perpendikel  $AD = a$ , der Perimeter, das ist,  $AB + AC + BC = p$ , die gesuchte  $BC = x$ , so ist die Summe der beiden übrigen Seiten  $AC + AB = p - x$ ; setzt man nun noch  $AC - AB = y$ , so ist (§. 130.) die größere Seite  $AC = \frac{p - x + y}{2}$ , die kleinere  $AB = \frac{p - x - y}{2}$ .

Nachdem wir aber auf diese Art zwei unbekannte Größen in den Kalkül gebracht haben; so müssen wir auch darauf bedacht sein, aus der Bestimmung der Aufgabe zwei verschiedene Gleichungen herzuleiten. Die eine Gleichung wird aus der Bestimmung hergeleitet, daß  $ABC$  ein rechtwinklichter Triangel ist, in welchem a)  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ; die andere erhalten wir durch die Betrachtung, daß  
sowohl

## Auflös. geometrischer Aufgaben. 211

sowohl  $\underline{BC \cdot AD}$  als auch  $\underline{AC \cdot AB}$  den Inhalt des gesuchten Triangels angiebt, folglich  $\alpha) \underline{BC \cdot AD} = \underline{AC \cdot AB}$ , also auch  $\alpha) \underline{BC \cdot AD} = \underline{AC \cdot AB}$  ist.

§. 324.

### Auflösung.

Drücken wir nun die Linien dieser Gleichungen durch die angeetzten Benennungen in Zahlen aus; so erhalten wir

$$a) x^2 = \left( \frac{p-x-y}{2} \right)^2 + \left( \frac{p-x+y}{2} \right)^2$$

$$b. i. b) x^2 = \frac{p^2 - 2px + x^2 - 2py + 2xy + y^2}{4} + \frac{p^2 - 2px + x^2 + 2py - 2xy + y^2}{4}$$

$$\text{daher c) } 4x^2 = 2p^2 - 4px + 2x^2 + 2y^2$$

$$d) x^2 = p^2 - 2px + y^2.$$

Die andere Gleichung ist

$$\alpha) 2x = \left( \frac{p-x+y}{2} \right) \cdot \left( \frac{p-x-y}{2} \right) \text{ das ist}$$

$$\beta) ax = \frac{p^2 - px + py - px + x^2 - xy - py + xy - y^2}{4}$$

$$\text{also } \gamma) 4ax = p^2 - 2px - y^2 + x^2, \text{ hiezu addirt d) } x^2 = p^2 - 2px + y^2, \text{ erhalten}$$

$$\text{wir e) } 4ax = 2p^2 - 4px,$$

$$\text{daher f) } 2ax = p^2 - 2px, \text{ eine Gleichung,}$$

in

worin

worin nur noch die eine unbekannte Größe  $x$  in der ersten Potenz enthalten ist. Aus derselben folgt ferner

$$\text{daß g) } 2ax + 2px = p^2$$

$$\text{oder h) } (2a + 2p)x = p^2$$

$$\text{daher i) } x = \frac{p^2}{2a+2p} = \frac{p^2}{2(a+p)}$$

### §. 325.

Nach dieser Formel läßt sich nun  $x$  nicht nur durch Rechnung in Zahlen, sondern auch nach der Proportion  $2(a+p) : p = p : x$ , oder, wenn die Linie  $2(a+p)$  zu groß für die Zeichnung werden sollte, auch nach  $\frac{a+p}{2} : \frac{p}{2} = \frac{p}{2} : x$  die Linie  $x$  durch geometrische Verzeichnung finden.

### §. 326.

Die Fig. 19. vorgestellte Zeichnung ist nur als eine bis zur weitem Berichtigung entworfene Zeichnung anzusehen, welche nur dazu dienen sol, uns die Forderungen und Bedingungen der Aufgabe deutlich vor Augen zu stellen. Nachdem wir aber diese Forderungen entwickelt haben, und durch diese Entwicklung (Analyse) auf die letzte leicht zu übersehende Formel gekommen sind, nach welcher wir die wahre Größe der Hypothense  $x$  in unserm verlangten Triangel wirklich bestimmen können; so hält es auch nun nicht mehr schwer, die ganze Figur, welche in dieser Aufgabe verlangt wird, richtig

## Auflös. geometrischer Aufgaben. 213

fig zu verzeichnen. Man mache nämlich Fig. 13.  $BC = x$ , entwerfe über  $BC$  einen halben Kreis, mache die Normale  $BF = a$ , und ziehe durch  $F$  die Parallele  $FAA'$ , so wird sowohl  $ABC$ , als der ihm bis zur Deckung gleiche Triangel  $A'BC$ , die Forderungen der Aufgabe erfüllen. Denn wir können folgendermaßen schließen: Die Hypothenuse des verlangten rechtwinklichten Triangels, dessen Perimeter einer gegebenen Linie gleich sein sol, mus nach der aus den Forderungen und Bedingungen der Aufgabe entwickelten Formel  $= BC$  sein. Nun kan aber außer den beiden Triangeln  $ABC$  und  $A'BC$  kein anderer Triangel von der Höhe  $BF = a$  über diese  $BC$  beschrieben werden, dessen Winkel bei  $A$  ein rechter Winkel wäre, folglich mus einer von diesen beiden, und da sich beide vollkommen gleich sind, jeder von diesen Triangeln die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie überhaupt erfüllt werden können. Denn da nach der Gleichung bei i) der aus  $p$  und  $a$  bestimmte Wert von  $x$  bei einerlei Werte von  $p$  desto kleiner werden mus, je größer  $a$  genommen wird, und es gleichwol kein rechtwinklichtes Dreieck geben kan, worinn die aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse ( $x$ ) gefälte Normale ( $a$ ) größer als die halbe Hypothenuse wäre; so sieht man wol ein, daß die Aufgabe unmöglich werden mus, wenn  $a$  zu groß gegen  $p$  gegeben würde.

§. 327.

Dem kleinen Kunstgriffe, daß die beiden einzelnen Seiten  $AC$  und  $AB$ , durch ihre benante

$D_3$

Summe

## 114 : Dreizehntes Kapitel.

Summe und Differenz ausgedrückt werden, hat man die bequeme Form der beiden Gleichungen bei  $\gamma$ ) und  $\delta$ ) zu danken, bei deren Addition sich verschiedene Glieder von unbekannten Größen gegenseitig aufheben, und man würde in einen weit verwickelteren Kalkül gerathen, wenn man etwa  $AC = y$  und  $AB = p - x - y$  setzen wolte. Der gleichen bequeme Benennung und andere ähnliche Kunstgriffe hängen von der Geschicklichkeit und dem Genie des Analisten ab, und lassen sich durch keine allgemeine Regeln bestimmen.

Wie viele Zeit und Mühe man durch eine vorläufige deutliche Ueberschauung der ganzen Aufgabe bisweilen ersparen könne, mag uns folgende kürzere Auflösung eben dieser Aufgabe lehren.

§. 328.

Kürzere Auflösung.

Man setze in dem rechtwinklichten Triangel  $ABC$ , Fig. 19. dessen Perimeter  $= p$  und Höhe  $AD = a$  sein sol,  $AB = z$ ,  $AC = y$ ,  $BD = u$ ,  $DC = r$ , so daß  $u + r = BC = x$ : so ist, da  $\triangle ABC \sim \triangle ABD \sim \triangle ADC$  (Num. 38.) und die Perimeter ähnlicher Triangel sich verhalten, wie zwei gleichnamige Seiten (Num. 46.)

$$z + a + u : z = p : x$$

$$y + r + a : y = p : x$$

$$p : x = p : x, \text{ daher}$$

$$\text{nach (§. 298.) } p + z + y + r + u + a : x + y + z = p : x$$

oder



## Auflös. geometrischer Aufgaben. 215

$$\begin{aligned} \text{d. i. } 2(p+a):p &= p:x, \\ \text{folglich } x &= \frac{p^2}{2(p+a)} \end{aligned}$$

§. 329.

Man kan diese letzte Proportion ohne viele Anstrengung sogleich in Gedanken übersehen, und dieselbe unmittelbar aus den Umständen der Aufgabe schließen. Denn da  $p:x$  das Verhältniß des Perimeters vom  $\Delta ABC$  zur größten Seite desselben angiebt; so darf man sich nur das zweite Glied als die Summe von den größten Seiten aller 3 Triangel ( $= p$ ) vorstellen, um in das erste Glied ebenfalls eine bekante Größe, nämlich die Summe aller Seiten dieser drei Triangel bringen zu können. Wenn man nun hiernach die vierte Proportionallinie  $x$  geometrisch findet; so ist die wahrscheinlich die möglichst kürzeste geometrische Auflösung dieser Aufgabe.

§. 330.

### LXVIII. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Perimeter und Flächeninhalte eines rechtwinklichten Triangels Fig. 19. die größte Seite desselben zu finden.

§. 331.

Vorbereitung.

Wenn wir den gegebenen Perimeter  $= p$ , die gesuchte  $BC = x$  benennen; so ist die Summe

D 4 der

## 216      Dreizehntes Kapitel.

der beiden übrigen Seiten  $AB + AC = p - x$ .  
 Es läßt sich aber durch diese benannten Linien noch  
 kein Ausdruck finden, welcher dem gegebenen Flä-  
 chenraume dieses Dreiecks  $= a^2$  gleich gesetzt wer-  
 den und die nöthige Gleichung geben könnte. Man  
 ist daher genöthigt, auch noch eine andere Seite  
 als  $AB = y$  zu benennen, wonach denn  $AC =$   
 $p - x - y$ . Hiedurch hat man nun freilich 2  
 unbekannte Größen in den Kalkül gebracht; es ergeben  
 sich aber auch aus den beiden Bestimmungen der  
 Aufgabe zwei Gleichungen, die eine daraus, daß  
 ABC ein rechtwinkliger Triangel ist, also

A)  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , die andere daraus,  
 daß der Inhalt des Triangels  $= a^2$ , also

$$\alpha) \frac{AB \cdot AC}{2} = a^2 \text{ sein mus.}$$

§. 332.

Auflösung.

Wir haben demnach, wenn in diesen beiden  
 Gleichungen die angegebenen Benennungen ge-  
 braucht werden,

$$A) x^2 = y^2 + p^2 - 2px + x^2 - 2py + 2xy + y^2$$

$$\text{daher } B) 0 = 2y^2 + 2xy - 2px - 2py + p^2$$

$$\text{ferner } \alpha) a^2 = \frac{py - xy - y^2}{2}$$

$$\text{daher } \beta) 2a^2 = py - xy - y^2.$$

Wird

## Anflöf. geometrischer Aufgaben. 217

Wird nun diese Gleichung bei  $\beta$ ) mit der bei  $B$ ) verglichen; so fällt in die Augen, daß wenn man diese bei  $\beta$ ) durch 2 multiplicirt, wodurch man erhält  $\gamma$ )  $4a^2 = 2py - 2xy - 2y^2$  und darauf zu ihr die bei  $B$ )  $0 = 2y^2 + 2xy - 2px - 2py + p^2$  abbirt, sich folgende  $\delta$ )  $4a^2 = -2px + p^2$  ergeben müsse, worin nur noch die eine unbekannte Zahl  $x$  in der ersten Potenz sich befindet. Nach der gewöhnlichen Auflösung ergibt sich hieraus

$$x = \frac{p^2 - 4a^2}{2p} \text{ oder } x = \frac{p}{2} - \frac{2a^2}{p}.$$

### §. 333.

Nach Anleitung dieser Formel kan man nun wieder entweder die Zahl  $x$  der gesuchten Linie durch Rechnung, oder auch die Linie selbst sogleich durch geometrische Verzeichnung finden, indem man nach der Proportion  $p:2a = a:L$  die vierte Proportionale findet  $L = \frac{2a^2}{p}$ , welche  $L$  von der Linie  $p$  abgezogen die gesuchte  $x$  oder  $BC$  giebt.

### §. 334.

#### Anderer Auflösung.

Diese letztere Aufgabe ist von der vorigen §. 322. nur darin unterschieden, daß stat des dort gegebenen Perpendikels  $= a$ , hier der Inhalt des Triangels  $= a^2$  gegeben ist. Wenn man nun das Perpendikel  $AD$  in diesem Triangel  $b$  nennet, so ist, indem

## 218 Dreizehntes Kapitel.

indem  $AC = x$  als die Grundlinie betrachtet wird,  $b$  die Höhe dieses Triangels, und demnach  $\frac{b}{x} = \frac{a}{a}$ , daher  $b = \frac{a^2}{x}$ . Schreibt man

nun in die (§. 328.) gefundene Formel  $x = \frac{p^2}{2p + 2a}$

stat des dort gegebenen Perpendikels  $a$  den Werth, welchen eben dieser Perpendikel in unsrer jetzigen Aufgabe haben mus: so gilt diese Formel alsdan auch für die jetzige Aufgabe. Man erhält auf diese Weise

$$x = \frac{p^2}{2p + 4a^2/x}, \text{ daher auch } 1 = \frac{p^2}{2px + 4a^2}$$

und  $2px + 4a^2 = \frac{p^2}{x}$ , woraus wie §. 233.

$$x = \frac{p^2 - 4a^2}{2p} \text{ gefunden wird.}$$

In folgenden Aufgaben wollen wir nunmehr einige Beispiele von einer reinen geometrischen Auflösung geben.

§. 335.

### LXIX. Aufgabe.

Einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, dessen Hypothenuse der gegebenen  $BC$  (Fig. 16.) und dessen Inhalt dem gegebenen Quadrate  $Q^2$  gleich sei.

§. 336.

§. 336.

Auflösung.

Diese Aufgabe enthält 2 Forderungen: 1) soll der Winkel  $BAC$ , welcher der gegebenen  $BC$  gegenüber liegen wird, ein rechter Winkel, und 2) der Flächenraum des Triangels  $ABC$  dem Inhalte eines gegebenen Quadrates gleich sein, dessen Seite  $Q$  ist.

Alle diejenigen Punkte, wo die Spitze des Winkels  $BAC$  liegen kan, so daß der ersten Forderung Genüge geschieht und  $BAC$  ein rechter Winkel wird, werden durch den über  $BC$  beschriebnen halben Cirkelfreis bestimmt. Denn, wenn ich aus tragend einen beliebigen Punkte, als  $A$ ,  $A'$ , &c. dieses halben Cirkels nach  $B$  und  $C$  die Schenkel  $AB$  und  $AC$  ziehe; so wird allemal der dadurch bei  $A$  entstehende Winkel  $BAC$  ein rechter Winkel sein. Sobald aber ein anderes Punkt  $P$ , welches nicht in diesem Kreise liegt, zur Spitze dieses Winkels genommen würde; so würde der Winkel  $CPB$  ein stumpfer Winkel werden, wenn das Punkt  $P$  innerhalb dieses Kreises, und  $CPB$  ein spiziger Winkel werden, wenn das Punkt  $P$  außerhalb des Cirkelfreises angenommen würde. Es ist also ausgemacht, daß die Spitze  $A$  des verlangten Triangels in dem beschriebnen halben Kreise liegen müsse.

Die zweite Forderung betrifft die Größe des Triangels  $BAC$ , welche bei der einmal bestimmten Basis

## 220     Dreizehntes Kapitel.

Basis BC dadurch zu erhalten ist, daß man diesem Triangel die gehörige Höhe giebt. Es wird aber die Normale BF die erforderliche Höhe sein, wenn sie die mittlere Proportionale ist zwischen den Linien BC und Q, denn, wenn

$$\underline{BC} : Q = Q : F B \text{ ist; so wird auch } \underline{BC} \cdot F B$$

$\overset{2}{=} Q \cdot Q$ , das ist, die Zahl, welche den Flächenraum des Triangels angiebt, derjenigen Zahl gleich sein, welche den Flächenraum des Quadrates angiebt. Zieht man daher die mit BC parallele FG; so ist nun ferner auch ausgemacht, daß die Spitze A in dieser FS liegen müsse, wenn der Triangel BAC dieser zweiten Forderung Genüge leisten soll. Aus der Zeichnung Fig. 16. ergeben sich daher die beiden Schneldungspunkte A und A' als die einzigen Derter, wo die Spitzen derjenigen Triangel liegen können, welche beide Forderungen der Aufgabe zugleich erfüllen, und es wird sowohl BAC, als BA'C der verlangte Triangel sein.

§. 337.

Wenn stat des Quadrates  $Q^2$  ein größeres Quadrat gegeben würde, dessen Seite  $\overset{2}{=} BC$

wäre, so wird, da nun in der Proportion, wodurch die FB bestimmt wird, in  $BC : Q = Q : F B$ ,

BC

## Auflös. geometrischer Aufgaben. 221

$\underline{BC}$  stat  $Q$  geschrieben werden kan, in  $\underline{BC} : \underline{BC}$

$\stackrel{2}{=} \underline{BC} : BF'$ , die  $BF'$  nothwendig  $\stackrel{2}{=} \underline{BC} = \underline{JH}$

werden; so daß die Parallele  $F'H$  den Kreis nur in dem Einen Punkte  $H$  berührt, und nur ein einziger Triangel  $BHC$  für diese GröÙe von  $Q^2$  den beiden Forderungen der Aufgabe zusammengenommen Genüge leistet.

Würde aber die Seite  $Q$  noch größer als  $\underline{BC}$  genommen, so würde auch die alsdenn erfor-

derliche Höhe des Triangels  $BF''$  größer als  $JH$ , folglich die Parallele  $F''G''$  nunmehr kein einziges mit dem Kreise gemeinschaftliches Punkt haben. Es lassen sich in diesem Falle unzählige Triangel verzeichnen, welche die erste Forderung bei 1) und ebenfalls unzählige Triangel verzeichnen, welche die zweite Forderung bei 2) erfüllen; aber es giebt keinen einzigen Triangel, welcher beiden Forderungen zugleich Genüge leistete. In sofern nun beide Bedingungen der Aufgabe unmöglich ferner mit einander bestehen können, sagt man, daß diese Aufgabe unmöglich sei, sobald  $Q > \underline{BC}$  gegeben

werde, und daß der Werth von  $Q \stackrel{2}{=} \underline{BC}$  die

Gränze der Möglichkeit bestimme. Diese Gränze der Möglichkeit sondert nur alle diejenigen Linien, welche größer als  $\underline{BC}$  sind, als solche GröÙe

2

ab,

## 222      Dreizehntes Kapitel.

ab, welche man der  $Q$  nicht geben darf. In andern Aufgaben hat man noch eine zweite Gränze zu bestimmen, wodurch auch diejenigen Linien ausgeschlossen werden, welche wegen ihrer zu geringen Grösse die Aufgabe unmöglich machen würden. Allein in dieser Aufgabe mag die  $Q$  so klein gegeben werden, und daher die  $Bf$  so klein zu nehmen sein, als man nur wil; so wird doch die durch  $f$  mit  $BC$  gezogene Parallele den Kreis in 2 Punkten außerhalb der  $BC$  so lange schneiden, und dadurch 2 Derter für die Spitze des verlangten Triangels angeben, bis  $Bf = 0$  wird, welches nicht eher geschieht, als wenn  $Q = 0$  gegeben wird.

§. 338.

### LXX. Aufgabe.

Ein Parallelogram zu verzeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebenes Trapezium.

§. 339.

#### Auflösung.

Man theile jede Seite des Trapeziums  $ACDB$  Fig. 17. in zwei gleiche Theile, und ziehe zwischen diesen Theilungspunkten die Linien  $FE$ ,  $EH$ ,  $HG$ ,  $GE$ ; so wird 1) die Figur  $FEHG$ , ein Parallelogram, und 2) dieses Parallelogram halb so groß, als das Trapezium sein.

§. 340.



# Auflös. geometrischer Aufgaben. 223

§. 340.

Beweis.

Zieht man die Hülfslinie  $CB$ ; so wird, weil  $AC:AG (= 2:1) = AB:AF$  ist,  $GF \subset CB$  (Num. 37) und daher  $o = u$  sein. Da nun ferner  $\sphericalangle GAF = \sphericalangle CAB$ ; so mus (Num. 38.)  $\triangle ACB \sim \triangle AGF$ , folglich  $AC:AG = CB:GF$ , und daher  $GF = \frac{1}{2} \cdot CB$  sein.

Auf eben die Weise kan auch die Aehnlichkeit der beiden Triangel  $CBD$  und  $HED$  erwiesen, und daraus gefolgert worden, daß auch  $HE = \frac{1}{2} \cdot CB$ , also  $HE = GF$  sei.

Zieht man nun noch die  $AD$ ; so folgt nach denselben Schlüssen, daß sowohl  $FE$  als  $GH = \frac{1}{2} \cdot AD$ , folglich  $FE = GH$  sei.

Wenn aber  $HE = GF$  und  $FE = GH$  ist; so ist (Num. 32) die Figur  $FEHG$  ein Parallelogram, und hiemit die erste Behauptung bei 1) erwiesen.

Da nun  $\triangle AGF \sim \triangle ACB$ ; so ist (Num. 47)  $\triangle ACB : \triangle AGF = AC^2 : AG^2$ : Es ist aber  $AC^2 : AG^2 = (2)^2 : (1)^2 = 4:1$  folglich, auch  $4:1 = \triangle ACB : \triangle AGF$  und

daher

## 224    Dreizehntes Kapitel.

daher  $AGF = \frac{1}{4} \cdot ACB$ . Eben so wird erwiesen,

$$\text{daß } HDE = \frac{1}{4} \cdot CDB$$

$$FBE = \frac{1}{4} \cdot ABD$$

$$HCG = \frac{1}{4} \cdot ACD \text{ folg.}$$

$$\text{lich } AGF + HDE = \frac{ACB + CDB}{4} = \frac{ABDC}{4}$$

$$\text{und } FBE + HCG = \frac{ABD + ACD}{4} = \frac{ABDC}{4}$$

$$\text{also } AGF + HDE + FBE + HCG = \frac{ABDC + ABDC}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ABDC \text{ ist.}$$

Wenn aber diese in der linken Seite der Gleichung benannten 4 Triangel zusammengenommen gerade die Hälfte des ganzen Trapeziums betragen; so mus auch der übrige in dem Parallelogramme eingeschlossene Raum desselben genau die andere Hälfte desselben ausmachen, und so ist hiermit auch die zweite Behauptung erwiesen.

§. 341.

### LXXI. Aufgabe.

Aus der verzeichneten Figur 18. sind mir die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , und die beiden Segmente  $BD$  und  $DE$  der geraden Linie  $BE$  gegeben; ich sol daraus die ganze Zeichnung herstellen.

§. 342.

### Erste Auflösung.

Wenn die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  einzeln gegeben sind, so ist dadurch auch der Winkel  $\alpha + \beta$  oder

## Auflös. geometrischer Aufgaben. 229

oder BAE, und wenn mir die Segmente BD und DE einzeln gegeben sind, auch die ganze Linie BE gegeben. Durch die 3 Punkte, B, A, E, muß sich ein Cirkel beschreiben lassen (Num. 21.) worin BE eine Sehne und BAE ein Winkel an der Peripherie ist, welcher auf dem unter dieser Sehne liegenden Bogen steht. Zieht man daher Fig. 17. die Linie  $be = BE$ ; so muß das Centrum dieses Cirkels in der aus der Mitte dieser Sehne in aufgerichteten Normale  $mf$  liegen (Num. 20.). Es kommt nunmehr nur noch darauf an, diesen Cirkel gerade so groß zu beschreiben, daß der über die Sehne  $be$  zu legende Peripheriewinkel  $b a e$  dem gegebenen BAE gleich werde. Macht man nun  $\angle e b n = BAE$  und zieht auf  $bn$  die Normale  $bc$ ; so wird ein jeder in dem mit  $cb$  beschriebenen Kreise über dem Bogen  $b g e$  stehender Peripheriewinkel, wie z. B.  $b a e$  dem Winkel  $e b n$  ( $= BAE$ ) gleich sein (Num. 17.) und man weiß nunmehr so viel, daß der Punkt  $a$  irgendwo in dem Bogen  $b f e$  liegen müsse.

Der Punkt  $a$  muß aber ferner in diesem Bogen dergestalt genommen werden, daß eine aus  $a$  zu ziehende den Winkel  $b a e$  theilende Linie  $ag$  dergestalt gezogen werden könne, daß 1) diese Linie in der  $be$  ein Segment  $b d = AD$  abschneide, und 2) der Winkel  $b a g$  alsdan auch  $= o$  werde. Macht man  $b d = BD$ , so geschieht der Forderung bei 1) allein genommen, durch eine jede

P von

von den unzähligen geraden Linien eine Genüge, welche wie  $h d i$  durch das Punkt  $d$  gehen. Macht man ferner den Centerwinkel  $b c g = 20$ , so wird jeder auf dem Bogen  $b g$  stehende Peripheriewinkel  $= 0$ , folglich die Forderung bei 2) durch eine jede von den unzähligen Linien erfüllt, welche wie z. B.  $g A'$ ,  $g A''$  aus  $g$  nach irgend einem Punkte des Bogens  $b f e$  gezogen werden. Aber nur die einzige gerade aus  $g$  durch  $d$  gezogene Linie erfüllt beide Forderungen zugleich; daher ist das von dieser Linie in  $a$  bestimmte Schnidungspunkt der einzige Punkt wo man  $a$  nehmen mus, damit die ganze Zeichnung  $a b d e$  der  $ABDE$  vollkommen gleich werde.

§. 343.

Zweite Auflösung.

Die beiden bestimmten Punkte  $b$ ,  $d$ , und der noch zu bestimmende Punkt  $a$ , müssen alle drei in Einem gemeinschaftlichen Cirkelkreise liegen, dessen Centrum in der auf die Mitte der Sehne  $b d$  normalen  $m f$ , liegen mus. Mache ich Fig. 20. den  $\angle d b n = BAD$ ; und ziehe die auf  $n b$  Normale  $b c$ , so wird jeder in dem mit  $c b$  beschriebnem Cirkel auf dem Bogen  $b f d$  eben so wohl als  $d b n$  stehende Peripheriewinkel  $= d b n = BAD$  sein. Der Punkt  $a$  mus daher in dem Bogen  $b f d$  liegen. Macht man ferner  $d c g = 2u$ , so wird jeder auf dem Bogen  $d g$  stehende Peripheriewinkel  $= u$ , folglich wenn  $d e = DE$  gemacht wird, von der durch  $e g$  gezogenen Linie in  $a$  das gesuchte Punkt  $a$  bestimmt.

§. 344.

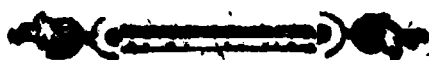
§. 344.

Dritte Auflösung.

Man ziehe Fig. 21 aus der Mitte  $m$  der gegebenen  $bd$  die Normale  $mf$ , mache  $dbg = 0$ , und ziehe aus  $b$  die auf  $bg$  normalstehende  $bc$ ; so wird der aus dem Schnidungspunkte  $c$  mit  $cb$  beschriebne Kreis gerade die Größe haben, daß jeder Winkel  $bad = dgb = 0$  wird, wenn das Punkt  $a$  irgend ein Punkt des Bogens  $bcd$  ist. Zieht man ebenfalls aus  $l$ , der Mitte von  $de$ , die Normale  $lr$ , macht  $edz = u$  und  $dr$  normal auf  $dz$ ; so wird ein jeder Winkel  $dae = edz = u$  sein, wenn  $a$  irgend ein Punkt des Bogens  $dpe$  ist. Der Schnidungspunkt dieser beiden Cirkel in  $a$  bestimmt daher die Spitze unserer verlangten Zeichnung  $abde$ , welche der  $ABDE$  vollkommen gleich sein wird.

Allgemeiner Beweis.

In einer jeden Auflösung ist  $be = BE$  und  $bd = BD$  gemacht: daher kan die Linie  $BDE$  auf die  $bde$  dergestalt gelegt werden, daß  $B$  in  $b$ ,  $D$  in  $d$  und  $E$  in  $e$  fällt. Da nun aus einer jeden Auflösung erhellet, daß es nur ein einziges Punkt  $a$  über die Linie  $be$  giebt, so daß  $bad = 0$ , und  $ead = u$  wird; so mus, da  $BAE = 0$ , und  $EAD = u$ , oder welches nun einerlei ist,  $bae = 0$ , und  $ead = u$  ist, auch  $A$  in  $a$  fallen; folglich  $AB = ab$ ,  $AD = ad$  und  $AE = ae$  sein, und sich  $ABDE$  mit  $abde$  decken.



## Vierzehntes Kapitel.

### Von den unreinen quadratischen Gleichungen.

§. 345.

#### LXXII. Aufgabe.

Ich habe zwei Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere, und das Produkt aus beiden ist 91; welches sind die beiden Zahlen?

§. 346.

#### Auflösung.

Die kleinere Zahl sei  $x$ ; soist die größere  $x + 6$ , das Produkt aus beiden  $x(x + 6)$ , oder  $x^2 + 6x$ . Es wird demnach verlangt, daß sein sol

$$x^2 + 6x = 91.$$

Wir müssen mit dieser Gleichung, wie allemal bei der Auflösung einer Gleichung, solche Veränderungen vorzunehmen suchen, daß wir endlich auf der einen Seite nur die unbekannte Zahl  $x$ , auf der andern Seite hingegen bloß bekannte Zahlen erhalten. Man sieht aber leicht, daß so wenig eine Versetzung der Glieder, als irgend eine Multiplikation oder Division der beiden Seiten uns diesem Zwecke näher bringen würde; auch sehen wir kein Mittel vor uns, wodurch wir etwa aus  $x^2 + 6x$  die

## Vierzehntes Kapitel. Von den 1c. 229

die Wurzel ziehen und angeben könnten. Je mehr wir durch diese Betrachtungen von der Schwierigkeit unsers Vorhabens überzeugt sind, um so viel mehr wird es uns erfreuen, daß wir durch folgenden kleinen Kunstgrif so leichte zu unserm Zwecke gelangen können.

Wenn wir nämlich  $(x + b)^2$  das ist (§. 255.)  $x^2 + 2bx + b^2$  mit der linken Seite unserer Gleichung  $x^2 + 2.3x$  vergleichen; so sehen wir ohne Mühe ein, daß diese beiden Glieder allerdings der Anfang zu einem Binomialquadrate sind, dessen erster Wurzeltheil  $x$ , und anderer Wurzeltheil  $3$  ist; denn  $(x + 3)^2$  giebt  $x^2 + 2.3x + 9$ . Indem wir also zur linken Seite unserer Gleichung noch das Glied  $+ 9$ , und, damit die Gleichheit beider Seiten erhalten werde, ebenfalls zur rechten Seite  $+ 9$  hinzusetzen; so erhalten wir eine Gleichung

$$x^2 + 2.3x + 9 = 91 + 6$$

deren linke Seite nun gewiß ein vollkommenes Quadrat ist. Sol nun  $x^2 + 2.3x + 9 = 91 + 9$  sein; so mus

$$\text{auch §. 162. } \sqrt{x^2 + 2.3x + 9} = \sqrt{91 + 9}$$

$$\text{das ist } x + 3 = \sqrt{100}$$

$$\text{daher } x = -3 + 10 \text{ sein.}$$

Hienach wird nun die kleinere Zahl  $x$  entweder  $= -3 + 10 = 7$ , demnach die größere  $y = 7 + 6 = 13$ ; oder es kan auch genommen  
p 3 werden

## 230 · Bierzehntes Kapitel. Von den

werden  $x = -3 - 10 = -13$ , wo alsdenn die größere  $y = -13 + 6 = -7$  wird. In der That erfüllen sowohl die beiden Zahlen 7, 13, als auch  $-13$ ,  $-7$ , alle Forderungen der Aufgabe.

### §. 347.

Eine solche Gleichung wie diese  $x^2 + 6x = 91$  heißt eine unreine quadratische Gleichung, so wie jede ähnliche Gleichung, worinnen dreierlei Glieder vorkommen, erstens solche Glieder, welche das Quadrat einer unbekannten Zahl, zweitens solche, welche die unbekannte Zahl selbst in der ersten Potenz, und drittens solche, welche diese unbekannte Zahl gar nicht enthalten.

### §. 348.

#### LXXIII. Aufgabe.

Zwei Personen verkaufen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthlr. Es sagt der erste zum andern: hätte ich dein Zeug so theuer wie das meinige verkauft; so hätte ich daraus 24 Rthlr. gelöst; darauf antwortet der andere: hätte ich dein Zeug wie das meinige verkauft; so hätte ich daraus  $12\frac{1}{2}$  Rthlr. gelöst. Wie viel Ellen hat jeder gehabt?

### §. 349.



§. 349.

Auflösung.

Der erste habe gehabt  $x$  Ellen, folglich der  
der andere  $x + 3$  Ellen. Der erste würde, wie er  
sagt, verkaufen

$x + 3$  Ellen für 24 Rthlr. folglich  $x$  Ellen, für  $\frac{24x}{x+3}$

der andere hätte gelöst aus

$x$  Ellen  $\frac{25}{2}$  Rthlr. folglich hat er aus  $x + 3$

Ellen  $\frac{25(x+3)}{2}$  Rthlr. gelöst.

Demnach muß sein

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2} = 35 \text{ durch } 2x$$

multipliziert  $\frac{48x^2}{x+3} + 25x + 75 = 70x$

$$\text{oder } \frac{48x^2}{x+3} - 45x + 75 = 0; \text{ durch } x+3$$

$$\text{multipliziert } 48x^2 - 45x^2 - 135x + 75x + 225 = 0$$

$$\text{oder } 3x^2 - 60x = -225; \text{ durch } 3$$

$$\text{dividirt } x^2 - 20x = -75.$$

Vergleicht man auch hier

mit  $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$  die beiden Glieder  
der linken Seite  $x^2 - 20x$

so fällt in die Augen, daß diese beiden Glieder der  
Anfang von dem Quadrate  $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$  sind, und daher diese linke Seite  
gewis eine vollständige Quadratzahl wird, sobald

## 232 Vierzehntes Kapitel. Von den

man nur  $+ 100$  hinzusetzt. Nachdem nun, um die Gleichheit beider Seiten zu erhalten, auch zur rechten Seite  $+ 100$  hinzugesetzt ist; so erhält man die Gleichung

$$x^2 - 20x + 100 = -75 + 100$$

daher auch  $\sqrt{(x^2 - 20x + 100)} = + \sqrt{25}$

das ist  $x - 10 = + 5$

daher  $x = 10 + 5.$

Durch den doppelten Werth der Wurzel, welche sowohl  $+ 5$  als  $- 5$  sein kan, erhält man also zwei Auflösungen. Nach der ersten, hat die erste Person 15 Ellen, die andere  $15 + 3 = 18$  Ellen gehabt. Wenn nun der erste aus 18 Ellen 24 Rthlr. lösen kan, so hat er 15 Ellen für 20 Rthlr.; der andere, welcher aus 15 Ellen  $\frac{25}{2}$  Rthlr. lösen kan, seine 18 Ellen für 15 Rthlr. verkauft; und auf diese Art haben beide zusammen allerdings 35 Rthlr. gelöst. Nach der andern Wurzel hat der erste  $10 - 5$  das ist 5 Ellen, der andere also  $5 + 3$ , das ist, 8 Ellen gehabt. In diesem Falle mus der erste, welcher, wie er sagt, aus 8 Ellen 24 Rthlr. gelöst haben würde, seine 5 Ellen für 15 Rthlr. und der andere, welcher aus 5 Ellen  $\frac{25}{2}$  gelöst haben würde, seine 8 Ellen für 20 Rthlr. verkauft haben: und auch in diesem Falle würden beide zusammen 35 Rthlr. gelöst haben.

§. 350.

LXXIV. Aufgabe.

Die Summe zweier Zahlen ist  $s$ , das Produkt derselben,  $p$ : welches sind die beiden Zahlen?

§. 351.

Auflösung.

Es sei die eine gesuchte Zahl  $x$ , die andere  $y$ ; so ist

$$\text{I. } x + y = s \quad \text{II. } x y = p,$$

folglich  $y = s - x$ . Schreibt man nun diesen Werth von  $y$  nämlich  $s - x$  stat  $y$  in die zweite Gleichung  $x y = p$ ; so erhält man  $x (s - x) = p$ , oder  $s x - x^2 = p$ .

Die Auflösung einer solchen Gleichung wird dadurch sehr erleichtert, daß man die Glieder derselben alleinal in einer bestimmten Ordnung, welche sich nach der unbekannten Zahl richtet, auf folgende Art schreibt:

$$-x^2 + s x = p$$

In eben der Absicht mus man jetzt, da das erste Glied negativ ist, die Zeichen aller Glieder verwechseln, damit das erste Glied positiv werde; so erhält man (§. 131.)

$$x^2 - s x = -p$$

In dieser Gleichung ist der Koeffizient des ersten Gliedes 1, der Koeffizient des zweiten Gliedes  $-s$ : denn so wird der bekante Faktor eines jeden

## 234 Vierzehntes Kapitel. Von den

Gliedes genant, welches ein Produkt aus diesem Koefficienten und der unbekannten Zahl in der ersten oder zweiten Potenz ist. Um zur Auflösung dieser Gleichung zu gelangen; so bemerke man, daß  $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{2s}{2}x + \frac{s^2}{4}$ , und demnach die linke Seite der Gleichung durch den Zusatz von  $\frac{s^2}{4}$  (= dem Quadrate des halben Koefficienten im 2ten Gliede) eine vollständige Quadratzahl wird, deren Wurzel  $x - \frac{s}{2}$  ist.

$$\begin{aligned} \text{Ist nun } x^2 - sx &= -p \\ \text{so ist auch } x^2 - sx + \frac{s^2}{4} &= -p + \frac{s^2}{4} \\ \text{also } \sqrt{x^2 - sx + \frac{s^2}{4}} &= \sqrt{-p + \frac{s^2}{4}} \\ \text{das ist } x - \frac{s}{2} &= \sqrt{-p + \frac{s^2}{4}} \\ \text{daher } x &= \frac{s}{2} + \sqrt{-p + \frac{s^2}{4}} \end{aligned}$$

§. 352.

Wäre gegeben  $s = 12$ ,  $p = 35$ ; so würde sein  $x = \frac{12}{2} + \sqrt{-35 + 36} = 6 + \sqrt{1} = 6 + 1$ , also sein sowohl  $x = 6 + 1 = 7$ , daher  $y = 12 - 7 = 5$ ; als auch sein  $x = 6 - 1 = 5$ , und daher die andere Zahl  $y = 12 - 5 = 7$ .

§. 353.

§. 353.

Wäre gegeben  $s = 8$ ,  $p = 14$ , so wird  $x = 4 + \sqrt{-14 + 16}$ , wo  $\sqrt{-14 + 16} = \sqrt{2}$  niemals ganz genau angegeben werden kan, indem 2 eine Irrationalzahl ist.

§. 354.

Würde  $s = 12$ ,  $p = 38$  gegeben, so wäre  $x = 6 + \sqrt{-38 + 36}$  wo  $\sqrt{-38 + 36} = \sqrt{-2}$  eine unmögliche Größe ist (§. 283.) welche man gar nicht angeben kan. Man sieht auch leicht ein, daß man zwei sich selbst widersprechende Forderungen thut, wenn man verlangt, daß zwei Zahlen zusammen addirt nur 12, und doch in einander multiplicirt 38 geben sollen.

Aus der gefundenen Formel lassen sich auch gar leicht die Gränzen der Möglichkeit für diese Aufgabe bestimmen; denn der Ausdruck  $\sqrt{-p + \frac{s^2}{4}}$  wird offenbar allemal alsdenn und nur in dem Falle eine unmögliche Größe, wenn  $p > \frac{s^2}{4}$  wird.

§. 355.

Da bei der Auflösung dieser Gleichung  $x^2 - sx = -p$  (§. 351.) alles darauf ankom, daß man zu beiden Seiten den halben Koefficienten des zweiten Gliedes quadriert hinzusetzte, und dieses allemal geschehen kan, was auch  $s$  für eine Zahl sein mag; so sieht man leicht ein, daß diese Auflösung bei allen

## 236 Vierzehntes Kap. Von den

allen unreinen quadratischen Gleichungen angewandt werden kan, vorausgesetzt, daß man die Gleichung zuvor auf die Form  $x^2 + Sx = \overline{P}$  gebracht, das ist, dergestalt zubereitet habe, daß das erste Glied nicht nur positiv ist, sondern auch keinen andern Koefficienten außer der 1 hat. Das erste kan allemal durch Verkehrung der Zeichen (§. 131.), das zweite dadurch erhalten werden, daß man die ganze Gleichung durch den Koefficienten des ersten Gliedes gehörig dividirt oder multiplicirt. So wird z. B.

aus  $bx^2 + rx = a + b$ , nachdem durch  $b$  dividirt worden  $x^2 + \frac{r}{b}x = \frac{a}{b} + 1$ ,

aus  $\frac{x^2}{n} - \frac{r}{b}x = -\frac{p}{q}$ , nachdem durch  $n$  multiplicirt worden,  $x^2 - \frac{n}{b}x = -\frac{np}{q}$ .

§. 356.

Man merke sich, daß aus der Gleichung  $x^2 - Sx = -P$ , nach §. 351.

wird  $x = \frac{S}{2} + \sqrt{(-P + \frac{S^2}{4})}$ ,

und daß aus der Gleichung  $x^2 + Sx = P$  folgen würde  $x = -\frac{S}{2} + \sqrt{(P + \frac{S^2}{4})}$  (\*)  
so

(\*) Denn wenn  $x^2 + Sx = P$

so ist auch  $x^2 + Sx + \frac{S^2}{4} = P + \frac{S^2}{4}$ ,

also

## unreinen quadrat. Gleichungen. 237

so kan man nach Anleitung dieser Formel, z. B. aus der Gleichung  $x^2 + 12x = -35$ , sogleich

schreiben, daß  $x = -6 + \sqrt{(-35 + 36)}$

aus  $x^2 - 6bx = a + b$ ,

daß  $x = 3b + \sqrt{a + b + 9b^2}$

§. 357.

### LXXV. Aufgabe.

Zwei Personen haben ein Kapital von 200 Rthlr. zu einem Handel zusammengebracht und eingelegt. Der erste läßt sein Geld 4 Monate darin und zieht darauf mit seiner Einlage und seinem Gewinne zusammen 176 Rthlr.; der andere hatte sein Geld nur 3 Monate im Handel, und mit Einlage und Gewinn zusammen 228 Rthlr. gezogen. Wie viel hat jeder eingelegt?

§. 358.

### Auflösung.

Die Einlage des erstern sei  $= x$ , des andern also  $200 - x$ ; so hat der erste mit seinem Kapital  $x$  in 4 Monaten gewonnen  $176 - x$ , der andere in 3 Monaten mit seinem

$$\text{also } \sqrt{x^2 + Sx + \frac{S^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{P + \frac{S^2}{4}}$$

$$\text{das ist, } x + \frac{S}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{P + \frac{S^2}{4}}$$

$$\text{folglich } x = -\frac{S}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{P + \frac{S^2}{4}}.$$

## 238 Vierzehntes Kap. Von den

seinem Kapitale  $200 - x$  gewonnen  $228 - 200 + x = x + 28$  Rthlr. Dieser letztere gewinnt daher mit seinem Kapitale in 1 Monate  $x + 28$  und

würde in 4 Monaten damit gewinnen  $\frac{3}{4x + 112}$ .

Wir wissen also nunmehr, daß in einerlei Zeit, nämlich in 4 Monaten, das Kapital  $x$  gewinnt  $176 - x$ , das andere Kapital  $200 - x$  gewinnt  $\frac{3}{4x + 112}$ ; und da nothwendig in einerlei Zeit der

Gewinn des einen Kapitals gerade so viel mal größer sein mus, als der Gewinn des andern Kapitals, um so viele mal das eine Kapital selbst größer ist, als das andere Kapital, so haben wir folgende Proportion

$$x : 200 - x = 176 - x : \frac{3}{4x + 112}$$

daher (§. 180.)

$$\frac{3}{4x^2 + 112x} = 35200 - 200x - 176x + x^2$$

$$\text{oder } \frac{3}{4x^2 + 112x} = 35200 - 376x + x^2$$

$$\text{also auch } \frac{3}{4x^2 + 112x} = 105600 - 1128x + x^2$$

$$\text{daher } x^2 + 1240x = 105600$$

daraus nach (§. 356.)

$$x = -620 \pm \sqrt{(105600 + (620)^2)}$$

$$x = -620 \pm \sqrt{(490000)}$$

$$x = -620 \pm 700$$

§. 359.



## unfeinen quadrat. Gleichungen. 339

§. 359.

Hienach ergibt sich, wenn die positive Wurzel gebraucht wird,  $x = 80$  Rthlr. daher die Einlage der andern Person  $= 120$  Rthlr. Der Gewinn der ersten Person ist also 96 Rthlr. welche von 80 Rthlr. in 4 Monaten gekommen sind, wonach 10 Rthlr. in einem Monate 3 Rthlr. gewonnen haben. Der Gewinn der zweiten Person, welcher mit 120 Rthlr. in 3 Monaten erworben ist, beträgt 108 Rthlr. welches ebenfalls danach richtig ist, daß 10 Rthlr. in einem Monate 3 Rthlr. geben.

§. 360.

### LXXVI. Aufgabe.

Ein Kaufman hat eine Summe von  $a$  Rthlr. in einem Handel angelegt, wodurch sich dies Kapital in 2 Jahren um  $b$  Rthlr. vermehrt hat, und verlangt nun zu wissen, wie viel er jährlich mit 100 Rthlr. gewonnen?

§. 361.

### Vorbereitung.

Es sei  $x$  die Zahl von Rthlr., welche jährlich mit 100 Rthlr. gewonnen sind; so wird da  $100 : a = x : a x$ , und da offenbar die Gewinste zweier Kapitalien sich gegen einander wie die Kapitalien selbst

## 240 Vierzehntes Kap. Von den

selbst verhalten müssen,  $a x$  den Gewinn ausdrück-

ten, welchen  $a$  Rthlr. in einem Jahre geben. Nach Verlauf des ersten Jahres ist demnach das Kapital  $a$  zu  $a + \frac{a x}{100}$  angewachsen, welches ver-

mehrte Kapital nun das zweite Jahr hindurch mit jedem 100, wiederum  $x$  Rthlr. gewinnt; so daß in folgender Proportion  $100 : a + \frac{a x}{100} = x : \frac{a x}{100}$

$+ \frac{a x^2}{10000}$  die vierte Proportionalzahl den Gewinn des zweiten Jahres angiebt.

§. 362.

Auflösung.

Diesemnach muß sein.

$$\frac{a x}{100} + \frac{a x}{100} + \frac{a x^2}{10000} = b$$

$$\text{also auch } 100 a x + 100 a x + a x^2 = 10000 b$$

$$\text{und } x^2 + 200 x = \frac{10000 b}{a}$$

$$\text{daher } x = -100 + \sqrt{\left(\frac{10000 b}{a} + 10000\right)}$$

§. 363.

Wäre nun z. B. das eingelegte Kapital  $a = 1200$  Rthlr. der ganze zweijährige Gewinn  $b = 305 + \frac{28}{100} = \frac{30528}{100}$  Rthlr.; so würde

$$\begin{aligned} \frac{10000 b}{a} + 10000 &= \frac{10000 \cdot 30528}{1200 \cdot 100} + 10000 \\ &= \frac{30528}{12} + 10000 = 12544, \end{aligned}$$

folglich

## unreinen Quadrat. Gleichungen. 241

folglich  $x = -100 \pm \sqrt{12544} = -100 \pm 112$ ,  
so daß  $x = 12$  Rthlr. wird, wenn man die  
positive Wurzel nimmt; aber  $x = -212$  Rthlr.  
würde, wenn man die negative Wurzel gebrauchen  
wolle. Von der Sicherheit des positiven Werthes  
kann uns folgende Probe versichern.

100 Rthlr. gewinnen 12 Rthlr. wie viel ge-  
winnen 1200 Rthlr.? Antwort 144 Rthlr. Das  
im Handel stehende Kapital wird also im zweiten  
Jahre  $1200 + 144$ , das ist 1344 Rthlr.

Im zweiten Jahre wird nun wieder mit je-  
dem 100 gewonnen 12 Rthlr. also mit 1344 Rthlr.  
gewonnen 161,28 Rthlr., so daß die Gewinne von  
beiden Jahren allerdings 305,28 Rthlr. betragen.

### §. 364.

Der negative Werth von  $x = -212$  könnte  
nichts anders bedeuten, als daß der Handel so  
schlecht gegangen wäre, daß mit jedem 100 Rthlr.  
212 Rthlr. verloren wären. Da aber in der Auf-  
gabe vielmehr angegeben wird, daß man gewonnen  
habe; so kann diese Wurzel zur Beantwortung un-  
serer Aufgabe gar nicht in Betrachtung kommen.  
Wolte man aber den Werth von  $x$  für den Fall fin-  
den, da bei dem ganzen Handel in zwei Jahren 6  
Rthlr. verloren wären; so müßte, wenn  $x$ , als ein  
Verlust, mit  $-$  bezeichnet werden sollte, auch der  
zwei-

## 242 Vierzehntes Kap. Von den

zweijährige Verlust  $b$  mit  $—$  bezeichnet werden.  
Dadurch würde

die Gleichung  $x^2 + 100x = 10000b$  verändert in

$$x^2 - 200x = -\frac{10000b}{2}$$

$$\text{also } x = 100 + \sqrt{-\frac{10000b}{2}} + 10000$$

$= 100 + \sqrt{7456} = 100 + 86,34$  etc. daher,  
wenn der negative Werth gebraucht wird,  $x = 13,65 -$  etc. werden: denn es mus dieser Werth um  
einige Tausendtel, Zehntausendtel etc. Thaler zu groß  
sein, weil die von 100 abzuziehende Wurzel um  
einige Tausendtel etc. zu klein war. Nimt man  
aber an, daß 100 Rthlr. in einem Jahre 13,65  
Rthlr. verlieren; so wird mit 1200 Rthlr. im er-  
sten Jahre 163,92 Rthlr. und mit dem übrigblei-  
benden Kapitale 1036,08 Rthlr. im zweiten Jahre  
141,528428 Rthlr. verloren. Diese beiden Ver-  
luste geben zusammen 305,448428 Rthlr. also ziem-  
lich genau den angegebenen Verlust von 305 Rthlr.

Im folgenden Kapitel wird die Anwendung  
der nöthigsten stereometrischen Sätze gezeigt, welche  
im zweiten Anhang von Num. 59. an kürzlich an-  
geführt sind.



Fünf

## Fünfzehntes Kapitel.

### Stereometrische Aufgaben.

§. 365.

#### LXXVII. Aufgabe.

Den Diameter eines Cylinders zu finden, welcher einem gegebenen Regel der Höhe und dem Inhalte nach gleich sein sol.

§. 366.

#### Auflösung.

Die Höhe des Regels sei  $= h$ , der Diameter seiner Grundfläche  $= d$ . Wenn der Diameter eines Cirkels gegeben ist; so kan auch die Peripherie desselben als eine bekante Größe betrachtet werden; indem dieselbe allemal  $3,14 \cdot d$  ist. Nennen wir diese Peripherie  $= p$ , und den gesuchten Diameter des Cylinders  $x$ ; so ist die zum Diameter  $x$  gehörige Peripherie  $= \frac{p \cdot x}{d}$  weil sich allemal ver-

hält  $d : p = x : \text{Peripherie desjenigen Cirkels, dessen Diameter } x \text{ ist. (Num. 48.)}$  Nach diesen Benennungen wird

die Grundfläche des Regels ausgedrückt durch die Zahl  $p \cdot d$  (Num. 36.), der Inhalt des Regels

durch  $\frac{h \cdot p \cdot d}{3 \cdot 4}$  (Num. 54.)

Q 2

die

## 244      Fünfzehntes Kapitel.

die Grundfläche des Cylinders ausgedrückt durch  
 $\frac{p x}{d} \cdot \frac{x}{4}$  oder  $\frac{p x^2}{4 d}$ , der Inhalt des Cylinders  
 durch  $\frac{h p x^2}{4 d}$  (Num. 51.)

Folglich sol nach der Forderung der Aufgabe sein

$$\frac{h p x^2}{4 d} = \frac{h p d}{3 \cdot 4}; \text{ also mus auch}$$

$$\text{sein } \frac{x^2}{d} = \frac{d}{3}, \text{ daher } x^2 = \frac{d^2}{3}, x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Es sei z. B.  $d = 8''$ , so wird  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{8}{1,732} = 4,62'' = 4'' 6''' 2''''.$$

Dieser Werth ist schon so genau, daß uns eine größere Genauigkeit, wodurch auch die Lotel und Lothel Scrupel &c. um welche noch gefehlt wird, angegeben würden, nichts nützen würde. Man siehe indessen leicht ein, daß dieser Werth von  $x$  um etwas zu groß ist; weil bei fortgesetzter Rechnung der Divisor  $\sqrt{3} = 1,73$  etwas größer gefunden wird. Wenn ich nämlich noch das fehlende Tausendtheil suchen wolte; so würde ich finden  $\sqrt{3} = 1,731$ , und es wird offenbar  $\frac{8}{1,731} < \frac{8}{1,730}$ .

Löset man die Gleichung  $x^2 = \frac{d \cdot d}{3}$  auf in  
 die Proportion  $d : x = x : d$ , so läßt sich nach  
 dieser

## Stereometrische Aufgaben. 245

dieser Proportion die mittlere Proportionale  $x$  zwischen den gegebenen Linien  $d$  und  $d$  durch geometrische Verzeichnung unmittelbar finden.

§. 367.

### LXXVIII. Aufgabe.

Einen Cirkel zu beschreiben, dessen Flächenraum der Seitenfläche eines gegebenen Cylinders gleich ist.

§. 368.

Auflösung.

Der Diameter des Cylinders sei  $= d$ , seine Peripherie  $= p$ , und die Höhe des Cylinders  $= h$ ; so ist seine Seitenfläche  $= hp$  (Num. 58.) Der Diameter des verlangten Cirkels sei  $= x$ : so ist seine Peripherie  $= \frac{px}{d}$ , sein Flächenraum  $= \frac{px^2}{4d}$ : also sol sein  $\frac{px^2}{4d} = hp$ ; daher  $x^2 = 4hd$ , und  $x = \sqrt{4hd}$ , oder  $x = 2\sqrt{hd}$ , daher  $\frac{x}{2} = \sqrt{hd}$ .

Nach dieser Formel ist der Radius des verlangten Cirkels ( $\frac{x}{2}$ ) die mittlere Proportionallinie zwischen  $h$  und  $d$ , indem aus der Proportion  $h : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : d$  folgt, daß  $\frac{x^2}{4} = hd$ , also  $\frac{x}{2} = \sqrt{hd}$ .

## 246     Fünfzehntes Kapitel.

§. 369.

### LXXIX. Aufgabe.

Einen Cylinder von einer bestimmten Höhe zu machen, welcher einer gegebenen Kugel dem Inhalte nach gleich ist.

§. 370.

### Auflösung.

Es sei der Durchmesser der Kugel  $= d$ , die zu diesem Durchmesser gehörige Peripherie  $= p$ ; so ist der Inhalt der Kugel  $\frac{p d^2}{6}$  (Num. 56.). Da

nun die Höhe des Cylinders schon bestimmt ist, welche  $= h$  sei; so mus man ihm die verlangte Größe durch die richtige Annahme der Grundfläche zu geben suchen, welche als eine Cirkelfläche gänzlich durch ihren Diameter bestimmt wird. Nent man diesen Diameter  $x$ , so wird die dazu gehörige Peripherie  $= \frac{p x}{d}$ , der Flächenraum dieser Cirkel-

scheibe  $= \frac{p x^2}{4 d}$ , daher der Cubikinhalt des ganzen

Cylinders, dessen Höhe  $h$  ist  $= \frac{h p x^2}{4 d}$ . Sol

nun  $\frac{h p x^2}{4 d} = \frac{p d^2}{6}$  sein; so mus sein  $x^2 = \frac{d^2}{\frac{4}{6} h}$ ,

daher  $\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{d^3}{6 h}} = d \cdot \sqrt{\frac{d}{6 h}}$

nach



## Stereometrische Aufgaben. 247

nach welcher Formel sich  $x$  als der Radius der gesuchten Grundfläche durch Rechnung finden läßt.)

Aus der Gleichung  $x^2 = \frac{d^3}{4 \cdot 6h}$  ergibt sich

folgende  $x^2 = \frac{2d^3}{3h}$ . Um nach dieser Gleichung

die Linie  $x$  durch geometrische Zeichnung zu finden, so suche man nach der Proportion  $3h : 2d = d : L$ . Die vierte Proportionale  $L = \frac{2d^2}{3h}$ ; so hat man

$x^2 = dL$ , woraus ferner folgt, daß  $d : x = x : L$ , also  $x$  die mittlere Proportionale zwischen  $d$  und  $L$  ist.

### §. 371.

Bei einiger Fertigkeit im Zeichnen wird man also in diesem Falle durch die geometrische Konstruktion allerdings leichter als durch Rechnung zu seinem Zwecke gelangen. Die Berechnung wird aber große Vorzüge behalten, wenn entweder die Linien in den gegebenen Körpern eine solche Größe haben, daß man die Zeichnung nach einem sehr verkleinertem Maße vornehmen müßte, wobei denn selbst die kleinen ganz unvermeidlichen Fehler in der Zeichnung schon eine beträchtliche Größe im wahren Maße ausmachen würden, oder wenn man überhaupt die größte Genauigkeit verlangen sollte. Denn diese läßt sich durch Rechnung so weit treiben als man nur wil; da hingegen bei der Zeichnung die Fertigkeit des Zeichners und die Schärfe seines

Gefichtes der möglichen Richtigkeit sehr trügliche Gränzen setzen.

§. 372.

Wäre in der vorigen Aufgabe (§. 369.) verlangt, daß der Cylinder mit der Kugel von gleicher Höhe, also  $h = d$  sein sollte; so würde stat der Formel  $x^2 = \frac{2d^3}{3h}$  sich folgende Formel  $x^2 = \frac{2d^3}{3d} = 2d^2$  ergeben; so daß nach Vorschrift dieser Formel  $x = \sqrt[3]{2d^2}$ , der Werth von  $x$  durch Rechnung in Zahlen und nach der Proportion  $\frac{2d}{3} : x = x : d$  der Diameter  $x$  als die mittlere Proportionale zwischen  $\frac{2d}{3}$  und  $d$  durch geometrische Verzeichnung gefunden wird.

§. 373.

### LXXX. Aufgabe.

Den Diameter einer Kugel zu finden, welche  $a$  Cubikraum enthält.

§. 374.

Wenn  $d$  den Diameter und  $p$  die Peripherie der verlangten Kugel anzeigt; so ist  $\frac{pd^2}{6}$  der Inhalt der Kugel. Folglich mus sein  $\frac{pd^2}{6} = a$ ,  
und

## Stereometrische Aufgaben. 249

und daher  $p d^2 = 6a$ . In dieser Gleichung ist uns weder  $p$  noch  $d$  bekannt. Man kan aber, weil allemal  $100 : 314 = d : p$  ist, stat  $p$  schreiben  $3,14 \cdot d$ , und so erhält man die Gleichung  $3,14 \cdot d^3 = 6a$ , daher  $d^3 = \frac{6a}{3,14}$ , und

$$d = \sqrt[3]{\frac{6a}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{600a}{314}}$$

§. 375.

Es sei der verlangte Kubikinhalt  $x = 113,04''$  so wird  $d = \sqrt[3]{\frac{113,04 \cdot 600}{314}} = \sqrt[3]{\frac{67824}{314}} = \sqrt[3]{216}$ .

Es kömt also nur darauf an, die Kubikwurzel von 216, das ist, diejenige Zahl zu finden, welche dreimal in sich selbst multiplicirt 216 giebt. Versucht man mit 5, so giebt  $5 \cdot 5 \cdot 5$  das Produkt 125, welches zu klein ist. Versucht man aber mit 6; so findet sich, daß  $6 \cdot 6 \cdot 6$  allerdings = 216, folglich

$\sqrt[3]{216} = 6$  ist. Bei größern oder solchen Zahlen, welche irrationale Kubikzahlen sind, deren Wurzeln sich, wie bei den irrationalen Quadratzahlen, nicht ganz genau angeben lassen, würde man vielleicht sehr viel vergebliche Versuche machen müssen, ehe man auf eine hinlänglich genaue Kubikwurzel käme. Man hat daher auch für die Ausziehung der Kubikwurzel solche ähnliche allgemeine Regeln entwickelt, als wir §. 265. für die

Q 5

Ausziehung

## 250 Fünfzehntes Kapitel.

Ausziehung der Quadratwurzel gegeben haben. Die dazu nöthigen Operationen sind aber in der That so mühsam und langwierig, daß ich meine Schüler damit verschonen wil, wenn sie sich desto eifriger bemühen wollen, bald zu einer hinreichenden Kenntniss der Logarithmen zu gelangen, wodurch man die Kubikwurzeln sowohl als die Quadratwurzeln mit beliebiger Genauigkeit ungemein leicht finden kan.

§. 376.

Uebrigens läßt sich auf eben die Art, wie §. 266.

erwiesen wurde, daß  $\sqrt[2]{\frac{P}{q}} = \frac{\sqrt[2]{P}}{\sqrt[2]{q}}$  auch darthun,

daß  $\sqrt[3]{\frac{P}{q}} = \frac{\sqrt[3]{P}}{\sqrt[3]{q}}$  und eben so wie §. 280. er-

wiesen wurde, daß  $\sqrt[2]{Pq} = \sqrt[2]{P} \sqrt[2]{q}$  sei, auch erwiesen, daß  $\sqrt[3]{Pq} = \sqrt[3]{P} \sqrt[3]{q}$  ist.

§. 377.

### LXXXI. Aufgabe.

Die Seite eines Kubus zu finden, welcher noch einmal so groß als ein gegebner Kubus ist, dessen Seite = 3'.

§. 378.

# Stereometrische Aufgaben. 251

§. 378.

Auflösung.

Der Inhalt eines Kubus, dessen Seite  $x$  ist, ist  $x^3$ ; der Inhalt des gegebenen Kubus ist  $(3)^3$  das ist 27. Sol nun  $x^3 = 2 \cdot 27$  sein; so mus offenbar auch  $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 27}$ , das ist,  $x = \sqrt[3]{54}$  sein.

Es kommt also darauf an, eine Zahl zu finden, welche 3mal mit sich selbst multiplicirt 54 giebt. 3 ist zu klein, indem  $3 \cdot 3 \cdot 3$  nur 27 giebt, und 4 ist schon zu groß, indem  $4 \cdot 4 \cdot 4$  schon 64 giebt. Der Bruch 3,77 aber kan als die irrationale Kubikwurzel von 54 ohne sehr merklichen Fehler angenommen werden.

§. 379.

LXXXII. Aufgabe.

Man sol ein Parallelipipedum machen, welches 125" enthält, dergestalt daß seine Länge AB (Fig. 25.) noch einmal so groß ist, als seine Breite AC, und seine Breite noch einmal so groß ist, als seine Höhe AD.

§. 380.

Auflösung.

Es sei die Zahl der Höhe  $AD = x$ , so ist die Zahl der  $AC = 2x$ , der  $AB = 4x$ , der Inhalt der Parallelipipedums  $= x \cdot 2x \cdot 4x = 8x^3$ .  
Sol

## 252 Fünfzehntes Kapitel.

Sol nun  $8x^3 = 125$  sein, so mus  $x^3 = \frac{125}{8}$  und

$$x = \sqrt[3]{(125 : 8)} = \sqrt[3]{125} : \sqrt[3]{8} = 5 : 2 = 2\frac{1}{2} \text{ sein.}$$

§. 381.

### LXXXIII. Aufgabe.

Das Verhältniß zu finden, worin die Umfläche einer Kugel mit der Umfläche eines Cylinders steht, dessen Inhalt dem Inhalte der Kugel, und dessen Grundfläche einer größten Cirkelscheibe der Kugel gleich ist.

§. 382.

#### Auflösung.

Wenn der Diameter der Kugel  $d$ , und die Peripherie einer ihrer größten Cirkelscheiben  $p$  genannt wird; so ist die Höhe des beschriebnen Cylinders  $= \frac{2d}{3}$ . (Num. 56.)

Die Umfläche der Kugel ist  $= pd$  (Num. 57.), die Seitenfläche des Cylinders  $= \frac{2dp}{3}$ , eine jede von seinen beiden Grundflächen  $= \frac{pd}{2}$ , daher die ganze Umfläche des Cylinders  $= \frac{4dp}{3} + \frac{pd}{2}$ .

Es

## Stereometrische Aufgaben. 253

Es ist demnach  $pd : \frac{2pd}{3} + \frac{pd}{2}$  gleich

dem Verhältnisse der Kugelumsfläche zur Cylindrumfläche. Damit man aber das Verhältniß vermittelst derer im sechsten Kapitel erwiesenen Lehrsätze, so einfach als möglich ist, ausdrücken könne, so setze man das Verhältniß  $= k : c$ , dergestalt,

$$pd : \frac{2pd}{3} + \frac{pd}{2} = k : c,$$

das ist,  $pd : \frac{(4+3)pd}{6} = k : c$  ist;

so wird auch (§. 191.)  $6pd : (4+3)pd = k : c$ ,

daher auch (§. 193.)  $6 : 7 = k : c$

oder  $1 : \frac{7}{6} = k : c$  sein.

Auf diese Weise haben wir gefunden, daß die Umfläche eines Cylinders, wie hier in der Aufgabe beschrieben ist, um  $\frac{1}{6}$  größer ist als die Umfläche der Kugel. Wenn daher z. B. die Umfläche einer Kugel  $42\Box'$  beträgt; so enthält die Umfläche eines solchen Cylinders, welcher mit dieser Kugel einerlei Peripherie und Inhalt hat,  $49\Box'$ .

§. 383.

z. d. LXXXIV. Aufgabe.

Einen gegebenen Kegel durch eine mit der Grundfläche parallel laufende Fläche in zwei gleiche Theile zu zerschneiden.

2

§. 384.

## Sechszehntes Kapitel.

### Vermischte Aufgaben.

§. 386.

#### LXXXV. Aufgabe.

Ein Bote geht von einem Orte  $L$  aus, und legt jeden Tag  $a$  Meilen zurück. Nach  $b$  Tagen wird ihm ein anderer, der täglich  $c$  Meilen gehen will, von dem Orte  $I$  nachgeschickt, welcher Ort  $I$  von dem andern  $L$  um  $e$  Meilen nach dem Orte  $G$  zu, wohin der erste Bote geht, entfernt ist. Nach wie viel Tagen und wie weit von  $I$  wird der zweite Bote den ersten einholen?

§. 387.

#### Vorbereitung.

Die 24. Figur kan zur Versinnlichung der ganzen Aufgabe dienen.  $L$  und  $I$  sind die beiden Derter, aus welchen die Boten ausgehen, und der Weg  $Ig$  fällt eigentlich genau in die Linie  $LG$ , so daß auch  $g$  in  $G$  fällt, welches der Ort ist, nach welchem beide Boten ihren Weg richten.  $O$  stellt den Punkt vor, wo der erste Bote vom zweiten eingeholt wird, &c.

§. 388.

#### Auflösung.

Wenn der letzte Bote  $x$  Tage geht bis er den ersten Boten einholt; so ist der erste Bote, der  $b$  Tage



Tage eher ausgegangen ist, schon  $b + x$  Tage unterwegs, bis er eingeholt wird. In  $x$  Tagen ist der zweite Bote  $cx$  Meilen, und in  $b + x$  Tagen der erste Bote  $a(b + x)$  Meilen gegangen, also mus  $LO = cx$  Meilen, und  $LO = a(b + x)$  Meilen sein. Nach der Figur fällt in die Augen, daß  $LO + LO = LO$ .

das ist  $cx + e = ab + ax$  sei. Folglich

$$\text{ist auch } cx - ax = ab - e$$

$$(c - a)x = ab - e$$

$$x = \frac{ab - e}{c - a}$$

$$c - a$$

§. 389.

Durch diese Formel wird  $x$  als die Zeit, nach welcher der zweite Bote den ersten einholt, aus den bekanten Größen  $a, b, c, e$ , bestimmt. Da nun  $LO = cx$ , so legt folgende Formel  $LO = c \cdot \frac{ab - e}{c - a}$

$$c - a$$

auch sogleich die Verbindung vor Augen, worin die Zahl der Entfernung, in welcher von  $L$  aus gerechnet der erste Bote eingeholt wird, mit den Zahlen der Größen  $a, b, c, e$  stehet.

§. 390.

Es sei  $a = 4, b = 3, c = 5, e = 10$ , so wird  $x = (4 \cdot 3 - 10) : (5 - 4) = 2$  und  $LO = 10$ . Der erste Bote ist also, bis er eingeholt wurde,  $x + b$ , das ist, 5 Tage gegangen, und

## 258 Sechszehntes Kapitel.

und da er jeden Tag 4 Meilen geht, so hat er in diesen 5 Tagen 20 Meilen  $= LO$  zurückgelegt, und es müssen hienach allerdings die beiden Boten zu gleicher Zeit in O sein.

§. 391.

Würde der zweite Bote aus demselben Orte L nachgeschickt, so wird in der ganzen Aufgabe weiter nichts verändert, als daß die Entfernung  $e = LI$  in diesem Falle  $= o$  wird. Folglich muß die herausgebrachte Formel auch für diesen Fall gelten, wenn wir nur allenthalben stat  $e$ ,  $o$  schreiben. Wir erhalten dadurch 
$$x = \frac{ab}{e-a}$$

§. 392.

Wäre nun z. B. wie vorhin gegeben  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ; so müßte nunmehr der zweite Bote  $x = (4 \cdot 3) : (5 - 4) = 12$  Tage gehen, bis er den ersten einholte. In diesen 12 Tagen geht er  $5 \cdot 12$ , das ist 60 Meilen; der erste Bote, welcher 3 Tage früher ausgegangen, ist alsdann 15 Tage unterwegs, und ist  $4 \cdot 15$ , also ebenfalls 60 Meilen zu eben der Zeit von L entfernt, wird daher in diesem Augenblicke allerdings vom zweiten Boten eingeholet.

§. 393.

Fiele endlich der Ort, wovon der zweite Bote ausgeht, auf die andre Seite in  $\lambda$ , so müßte die Ent-

## Vermischte Aufgaben. 259

Entfernung 12 in Rücksicht auf einen Boten, der in gerade entgegengesetzter Richtung von I nach G zu einen Weg macht, welcher mit + bezeichnet wird, nothwendig mit — bezeichnet werden. Wenn aber das Zeichen von e in der ersten Grundgleichung in das entgegengesetzte verändert wird, so wird auch in der daraus hergeleiteten Formel die Zahl e gerade entgegengesetzt bezeichnet sein, und die §. 388. gefundene Formel wird sich für diesen Fall abändern in folgende 
$$x = \frac{ab + e}{c - a}$$

Wenn wiederum gegeben würde  $a = 4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ,  $e = 10$ ; so würde nunmehr  $x = (12 + 10) : (5 - 4) = 22$  Tage gefunden.

§. 394.

### LXXXVI. Aufgabe.

Ein Goldschmid hat 14löthiges und 12löthiges Silber, und wil aus beiden 8 Mark 12löthiges Silber zusammen mischen: wie viel mus er von jeder Sorte nehmen?

§. 395.

### Auflösung.

Eine Mark hält 16 Loth. Bierzehnlöthiges Silber heist eine aus Silber und Kupfer dergestalt vermischte Masse, daß immer eine Mark dieser Masse 14 Loth Silber und 2 Loth Kupfer enthält. Eillöthig heist diese Vermischung, wenn davon

R 2
eine

## 260 Sechszehntes Kapitel

eine Mark nur 11 Loth Silber und also 5 Loth Kupfer enthält. Setzt man nun, daß von dem 14löthigen Silber  $x$  Mark, von dem 11löthigen also  $8 - x$  Mark zur verlangten Mischung genommen werden; so enthalten die  $x$  Mark vom 14löthigen Silber offenbar  $14x$  Loth Silber, die  $8 - x$  Mark vom 11löthigen aber  $11(8 - x)$  Loth Silber. Da die verlangte Mischung von 8 Mark 12löthig sein sol, so mus in derselben überhaupt  $12 \cdot 8$  Loth Silber enthalten, und daher

$$14x + 11(8 - x) = 12 \cdot 8,$$

$$\text{das ist } 14x + 88 - 11x = 96$$

$$\text{daher } 3x = 8 \text{ und } x = \frac{8}{3} \text{ sein.}$$

Antw. Von dem 14löthigen Silber müssen  $\frac{8}{3}$  Mark, von dem 11löthigen also die übrigen  $\frac{16}{3}$  Mark genommen werden. Nun werden diese  $\frac{8}{3}$  Mark vierzehnlöthigen Silbers  $14 \cdot 8$  Loth Silber und die  $\frac{16}{3}$  Mark eilflöthigen Silbers  $11 \cdot 16$  Loth Silber, also die ganze Masse der Vermischung  $14 \cdot 8 + 11 \cdot 16$  Loth, das ist 96 Loth Silber, folglich eine jede Mark dieser Vermischung 12 Loth Silber enthalten, wie verlangt wurde.

# Vermischte Aufgaben. 261

§. 396.

## LXXXVII. Aufgabe.

Durch 2 Röhren, welche ununterbrochen und beständig gleich stark laufen, fließt Wasser in ein Gefäß. 1) Das Wasser, welches aus der ersten Röhre in a Stunden ausfließt, macht mit demjenigen, welches aus der zweiten Röhre in b Stunden fließt n Maß. Läßt man aber 2) die erste Röhre c Stunden und die zweite Röhre d Stunden laufen; so erhält man m Maß. Wie viel Maß laufen in Einer Stunde aus jeder Röhre?

— b 2)

§. 397.

## Auflösung.

Es sei x die Zahl der Maße, welche aus der ersten Röhre in einer Stunde, y die Zahl der Maße, welche aus der zweiten Röhre in einer Stunde ausfließen. (1)  $ax + by = n$

Eben so wird aus der ersten Röhre in c Stunden cx Maß, aus der zweiten Röhre in d Stunden dy Maß ausfließen, und daher folgt: (2)  $cx + dy = m$ . Wir haben demnach folgende zwei Gleichungen aufzulösen:

$$I) ax + by = n, \quad II) cx + dy = m.$$

Aus der Gleichung bei I) folgt  $x = \frac{n - by}{a}$ .

Schreibt man nun stattdes jeden in der Gleichung

II

bei

bei II) vorkommenden  $x$  diesen Werth von  $x$ , so mus man nothwendig eine Gleichung erhalten, in welcher kein  $x$ , sondern nur noch die andere unbekannte Zahl  $y$  anzutreffen ist, nämlich

$$c \left( \frac{n - by}{a} \right) + dy = m$$

$$\text{das ist } \frac{cn - bcy}{a} + dy = m$$

$$cn - bcy + ady = am$$

$$ady - bcy = am - cn$$

$$(ad - bc)y = am - cn$$

$$y = \frac{am - cn}{ad - bc}$$

§. 398.

Sobald nun  $a, b, c, d, n, m$ , in bestimmten Zahlen gegeben sind; so läst sich nach der Vorschrift dieser allgemeinen Formel auch  $y$  in einer bestimmten Zahl angeben, und indem man alsdenn diesen gefundenen Werth von  $y$  stat  $y$  in eine von den beiden Grundgleichungen schreibt, auch der Werth von  $x$  berechnen. Wolte man aber auch für die  $x$  eine solche allgemeine Formel haben, als wir für die  $y$  gefunden haben; so darf man nur auch diesen allgemeinen Werth von  $y$  in eine von den beiden Grundgleichungen, z. B. in die Gleichung I)  $ax + by = n$ , stat eines jeden darin vorkommenden  $y$  schreiben, so erhält man

$$ax + b \cdot \left( \frac{am - cn}{ad - bc} \right) = n$$

$$\text{daher } ax = n - b \cdot \left( \frac{am - cn}{ad - bc} \right)$$

$$\text{das ist } ax = \frac{n(ad - bc) - abm + bcn}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{n(ad - bc) - abm + bcn}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{and - bcn - abm + bcn}{ad - bc}$$

$$ax = \frac{and - abm}{ad - bc}$$

$$x = \frac{nd - bm}{ad - bc}$$

$$x = \frac{nd - bm}{ad - bc}$$

§. 399.

Es sei  $a = 4$ ,  $b = 7$ ,  $n = 26$ ,  $c = 5$ ,  
 $d = 6$ ,  $m = 27$ ; so wird

$$x = (156 - 189) : (24 - 35) = -33 : -11 = 3$$

$$y = (108 - 130) : -11 = -22 : -11 = 2$$

§. 400.

Wäre gegeben  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,  $n = 22$ ,  
 $c = 9$ ,  $d = 7$ ,  $m = 31$ , so würde  $x =$   
 $(22 \cdot 7 - 31 \cdot 4) : (6 \cdot 7 - 4 \cdot 9) = (154 - 124) :$   
 $(42 - 36) = 30 : 6 = 5$ : folglich durch die erste  
 Röhre in einer Stunde 5 Maß Wasser in das  
 Gefäß

Gefäß eingeflossen sein. Ferner wird  $y = (6 \cdot 13 - 22 \cdot 9) : 6 = (186 - 198) : 6 = -12 : 6 = -2$ . Dieser negative Werth von  $y$  kan nichts anders bedeuten, als daß aus der zweiten Röhre nicht nur nichts in das Gefäß eingeflossen ist, denn  $-2$  kan nicht einerlei bedeuten mit  $0$ , sondern sogar  $2$  Maß aus dem Gefäße in jeder Stunde herausgeflossen sind. Wir müssen uns daher diese ganze Sache folgendermaßen vorstellen. Durch die eine Röhre fließt in ein Gefäß stündlich  $5$  Maß Wasser hinein, welches zum Theil aus einer andern kleinern Röhre am Boden des Gefäßes, welche stündlich  $2$  Maß Wasser von sich giebt, wieder ausfließt. Nachdem nun die obere Röhre  $6$ , die untere  $4$  Stunden gelaufen ist; so mus sich allerdings  $30 - 8$ , das ist,  $22$  Maß Wasser, und nach dem zweiten Versuche, wo die obere Röhre  $9$ , die untere  $7$  Stunden gelaufen ist, allerdings  $45 - 14$ , das ist,  $31$  Maß Wasser im Gefäße befinden.

§. 401.

## LXXXVIII. Aufgabe.

Ein Hase hat jetzt  $80$  Sprünge vor einem Hunde voraus. Der Hund thut  $7$  Sprünge, indem der Hase nur  $5$  thut, und der Hund komt mit  $2$  Sprüngen eben so weit, als der Hase mit  $3$  Sprüngen: wie viel Sprünge hat der Hase noch zu thun, bis er vom Hunde eingeholet wird.

§. 402.



# Vermischte Aufgaben. 165

§. 402.

## Auflösung.

Man setze die Weite eines Hasensprunges  $= y$ ,  
so ist die Weite eines Hundesprunges  $= \frac{3}{2} \cdot y$ .  
Die Zahl der Sprünge, welche der Hase noch zu  
thun hat, sei  $x$ , so ist  $\frac{7}{2} \cdot x$  die Zahl der Sprünge,  
welche der Hund in eben der Zeit thut. Der Hase  
legt durch  $x$  Sprünge die Weite  $xy$ , der Hund  
durch seine  $\frac{7}{2} \cdot x$  Sprünge die Weite  $\frac{7}{2} x \cdot \frac{3}{2} y$  zu-  
rück. Da nun der Hase schon 88 Sprünge voraus,  
und durch diese 88 Sprünge die Weite  $88 y$  voraus  
hat; so mus

$$1) \frac{7}{2} x \cdot \frac{3}{2} y = xy + 88 y$$

$$2) \frac{21 xy}{10} = xy + 88 y$$

folglich auch, nachdem die ganze Gleichung durch  
 $y$  dividirt worden,

$$3) \frac{21 x}{10} = x + 88$$

$$4) 21 x = 10 x + 880$$

$$5) 11 x = 880$$

$$6) x = 80 \text{ sein.}$$

Antwort. Der Hase hat noch 80 Sprünge zu thun,  
bis er vom Hunde eingeholt wird.

§. 403.

Daraus, daß  $y$  aus der ganzen Gleichung  
ganz und gar ausgefallen ist, können wir schließen,  
daß die Größe dieser Weite in die Bestimmung

N 5

des

§. 406.

Nach dieser Vertheilung verhält sich nun allerdings  $360 : 720 = 1 : 2$ , und  $720 : 120 = 3 : 1$ , und diese beiden vom Verstorbenen angegebenen Verhältnisse sind völlig beobachtet. Aber der Testator selbst würde diese Vertheilung wohl nur im dem Falle billigen, wenn er sich beständig gewöhnt hätte, nach den Regeln der geometrischen Verhältnisse deutlich zu denken, nach welchen die Zahlen bisweilen so ungemein stark, bisweilen aber nur sehr wenig ab- und zunehmen. Um mit aller Billigkeit zu verfahren, müste man noch ausmachen, ob nicht bei solchen Testamenten mehr nach dem arithmetischen als geometrischen Verhältniß bestimmt würde, und ganz andere Gründe zur Entscheidung die Verhältnis der und der Tochter genau würde, welches in geschieht.

§. 407.

## XC. Aufgabe.

Es hat jemand auf 2 Kornböden Getralbe liegen. Er weis nur so viel, daß 1) auf dem ersten Boden 30 Scheffel Roggen, 20 Scheffel Gersten und 10 Scheffel Walzen liegen, welche zusammen 230 Rthlr. werth sind, daß 2) auf dem zweiten Boden 15 Scheffel Roggen, 6 Scheffel Gersten und 12 Scheffel Walzen liegen, welche nach eben dem

## Vermischte Aufgaben. 269

dem Preise 138 Rthlr. werth sind, und: daß  
3) nach demselben Preise schon 10 Scheffel Roggen,  
5 Scheffel Gersten und 4 Scheffel Weizen für  
75 Rthlr. abgelassen habe. Wie viel kostet ein  
Scheffel von jeder Getraideart.

§. 408.

Auflösung.

Man setze, daß ein Scheffel Roggen  $x$  Rthlr.  
ein Scheffel Gersten  $y$  Rthlr. und ein Scheffel  
Weizen  $z$  Rthlr. koste; so ist

$$1) \quad 30x + 20y + 10z = 230$$

$$2) \quad 15x + 6y + 12z = 138$$

$$3) \quad 10x + 5y + 4z = 75$$

Aus 1) folgt  $x = \frac{230 - 20y - 10z}{30}$ ,

Schreibt man diesen Werth von  $x$  stat eines jeden  
in der Gleichung bei 2) sich findenden  $x$ ; so erhält  
man

$$2) \quad 15 \cdot \left( \frac{230 - 20y - 10z}{30} \right) + 6y + 12z = 138$$

das ist  $115 - 10y - 5z + 6y + 12z = 138$

oder  $-4y + 7z = 23$ , eine Gleichung, worin  
kein  $x$  mehr anzutreffen ist, und aus welcher sich  
ergiebt

$$y = \frac{7z - 23}{4}$$

Schreiben wir in die Gleichung bei 3) stat  $x$  den  
gefundenen durch  $y, z$  und bekante Zahlen bestimmten  
Werth;

## 270 Sechshundertes Kapitel.

Wenig; so erhalten wir

$$3) 10 \cdot \left( \frac{230 - 20y - 10z}{30} \right) + 5y + 4z = 75$$

$$1) 1) 230 - 20y - 10z + 15y + 12z = 225$$

$$- 5y + 2z = -5$$

$$5y - 2z = 5$$

und wenn wir nun noch in dieser Gleichung stat  $y$  den vorhin gefundenen Werth für  $y$  schreiben, wodurch  $y$  aus der unbekannten Zahl  $z$  und aus bekannten Zahlen bestimmt wurde; so ergiebt sich

$$5 \cdot \left( \frac{7z - 23}{4} \right) - 2z = 5$$

$$\text{oder } 35z - 115 - 8z = 20$$

$$\text{woraus folgt } z = \frac{135}{27} = 5 \text{ Nthlr.}$$

$$\text{Also } y = \frac{7z - 23}{4} = \frac{35 - 23}{4} = 3 \text{ Nthlr.}$$

$$\text{und } x = \frac{230 - 20y - 10z}{30} = \frac{230 - 60 - 50}{30} =$$

$$\frac{120}{30} = 4 \text{ Nthlr.}$$

§. 410.

### XCI. Aufgabe.

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks aus der gegebenen Seite  $s$  durch einen algebraischen Ausdruck zu bestimmen.

§. 410.

## Vermischte Aufgaben. 271

§. 410.

Auflösung.

Es sei Fig. 25. die Seite  $AB = BC = AC = s$ , die gesuchte Höhe  $AD = y$ ; so ist  $AD = \frac{s}{2}$ , und  $AD^2 = AB^2 - BD^2$ , d. i.  $y^2 = s^2 - \frac{s^2}{4}$ , das ist  $y^2 = \frac{3s^2}{4}$ , daher  $y = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ .

§. 411.

XCII. Aufgabe.

Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu finden, welches einem Dreieck ABC (Fig. 26.) gleich ist, dessen Grundlinie  $AC = b$  und Höhe  $BD = p$  gegeben sind.

§. 412.

Auflösung.

Die Seite des verlangten gleichseitigen Dreiecks sei  $= x$ ; so ist die Höhe desselben (§. 410.)  $= \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ; also  $\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot x$  oder  $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$  der Inhalt desselben, welcher dem Inhalte des gegebenen Dreiecks  $\frac{bp}{2}$  gleich sein sol, also mus  $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{bp}{2}$ , folglich  $x^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}}$  sein.

§. 413.

Um nach dieser Formel die Linie  $x$  geometrisch zu finden, nehme man eine Linie von beliebiger Größe

Größe & B. F D (Fig. 27.) zur Einheit an, mache  $DH = 3 FD = 3 \cdot 1$ , beschreibe über FH einen halben Zirkelkreis, und ziehe die Normallinie DI so ist, weil  $FD : DI = DI : DH$  ist,  $DI^2 = FD \cdot DH = 1 \cdot 3$ , also  $DI = \sqrt{3}$ . Macht man ferner  $DB = p$ ,  $DL = 2FD$  und zieht  $BG \cap IL$ ; so ist  $ID : BD = DL : DG$ , folglich  $DG = \frac{BD : DL}{ID} = \frac{2p}{\sqrt{3}}$ . Man mache

ferner noch  $DK = b$ , beschreibe über GK einen halben Zirkel, und ziehe die Normallinie DN, so ist  $GD : DN = DN : DK$   
 d. i.  $2p : DN = DN : b$

folglich  $DN^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}} = x^2$ , also DN die verlangte Seite.

§. 414.

Man giebt gewöhnlich folgende geometrische Konstruktion dieser Aufgabe an.

Mit des gegebenen Triangels ABC Basis AC (Fig. 28.) beschreibe man einen gleichseitigen  $\triangle ACE$ , ziehe die Parallele BG, beschreibe über AE einen halben Zirkelkreis, und ziehe aus G die Normale y; so ist x die Seite des verlangten gleichseitigen Triangels.

§. 415.

§. 415.

KCH Aufgabe.

Durch den algebraischen Kalkül zu finden, ob die angegebne Konstruktion richtig sei.

§. 416.

Auflösung.

Da nach der §. 414. angegebenen Verzeichnung gemacht ist  $AGH = AHE (=R)$  folglich weil  $n + r = n + m (=R)$  auch  $r = m$  ist, so ist, (Num. 38.)  $\triangle AHE \sim \triangle AHG$ , also

$$AE : AH = AH : AG$$

$$\text{daher } AH^2 = AE \cdot AG$$

oder wenn  $AE = AC$ , als die gegebne Basis,  $= b$  und  $AH$  als die vermuthliche gesuchte Seite  $= x$  gesetzt wird

$$x^2 = b \cdot AG.$$

Um daher zu beurtheilen, ob  $x$  den richtigen Werth erhalten habe; so mus noch der Werth bestimmt werden, welchen  $AG$  in der Konstruktion erhält. Es ist aber

$$EF : GK = EA : GA,$$

oder, da  $GK = BD = p$  und nach (§. 410.)

$$EF = \frac{b\sqrt{3}}{2} \text{ und } EA = b \text{ ist,}$$

$$\frac{b\sqrt{3}}{2} : p = b : GA.$$

$$\text{daher } GA = \frac{2pb}{b\sqrt{3}} = \frac{2p}{\sqrt{3}}.$$

Diesen

Diesen Werth von GA in die obige Gleichung  $x^2 = b \cdot AG$  geschrieben, erhalten wir  $x^2 = \frac{2bp}{\sqrt{3}}$ , daher  $x = \sqrt{\frac{2bp}{3}}$ .

Aus der vorigen Auflösung §. 412. wissen wir nunmehr schon, daß der richtige Werth von x ist. Gesezt aber, dieser Werth sei uns noch nicht so bekannt, so können wir nur ferner untersuchen, ob ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite  $BC = \sqrt{\frac{2bp}{3}}$  genommen wird  $= \frac{pb}{2}$  sei, auf folgende Weise.

Wenn man in dem gleichseitigen Dreiecke, Fig. 25, die eine Seite  $AB = \sqrt{\frac{2bp}{3}}$  setzt; so wird (§. 410.) die Höhe desselben  $AD = \sqrt{\frac{2bp}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2bp}{3}} \cdot \sqrt{3}$ , also der Inhalt desselben  
 allerdings  $= \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2bp}{3}} \cdot \sqrt{3}$ .  
 $\sqrt{\frac{2bp}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{2bp}{\sqrt{3}} = bp$  sein.



§. 417.

XCIV. Aufgabe.

Den Diameter einer Kugel zu finden, deren Umfläche halb so groß ist, als die Umfläche einer gegebenen Kugel.

§. 418.

Auflösung.

Die gegebne Kugel sei K, ihr Durchmesser D und ihre Peripherie P, so ist ihre Umfläche = PD.

Die gesuchte Kugel sei k, ihr Durchmesser d, ihre Peripherie p, so ist ihre Umfläche = pd.

Wenn nun  $PD = 2pd$ , das ist (Num. 34.)  $3,14 \cdot D^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot d^2$  sein sol; so mus  $D^2 = 2d^2$ , daher  $d = \frac{D}{\sqrt{2}}$  sein.

§. 419.

XCV. Aufgabe.

Das Verhältniß zu finden, worinnen die Umflächen zweier Kugeln stehen, welche sich verhalten wie m : n.

§. 420.

Auflösung.

K sei die eine Kugel, D ihr Diameter, P ihre Peripherie, daher ihre Umfläche  $V = PD$ .

Es a

k.

## 278 Sechszehntes Kapitel.

k sei die andere Kugel, d ihr Diameter, p ihre Peripherie; daher ihre Umfläche  $v = pd$ ; so ist, da sich verhalten sol

$$K : k = m : n, \text{ und}$$

$$\text{allema} K : k = \frac{1}{8} PD^2 : \frac{1}{8} pd^2 \text{ ist}$$

$$\text{auch } m : n = \frac{1}{8} PD^2 : \frac{1}{8} pd^2$$

$$\text{das ist } m : n = PDD : pdd;$$

m : n ist demnach aus den beiden Verhältnissen PD : pd und D : d zusammengesetzt, und da PD : pd = V : v ist; so ist auch §. 308.

$$m : n = VD : vd$$

$$\text{folglich auch } m : n = VD : vd \text{ (§. 193.)}$$

$$\frac{D}{d} : \frac{D}{d} = \frac{D}{d} : \frac{d}{d}$$

$$\text{das ist } m : n = V : v (*)$$

$$\frac{D}{d} : \frac{D}{d}$$

$$\text{oder auch } \frac{mDd}{D} : \frac{ndD}{d} = V : v$$

$$\text{das ist } md : nD = V : v.$$

§. 421.

(\*) Nach dieser Proportion ist V : v zusammengesetzt aus beiden Verhältnissen m : n und 1 : 1. Da

$$\frac{D}{d} : \frac{D}{d}$$

nun  $\frac{1}{D} : \frac{1}{d} = d : D$ ; so kan ich auch sagen, daß

V : v aus den beiden Verhältnissen m : n und d : D

zusammengesetzt ist: hierüber pflegt man sich gewöhn-

lich so ausdrücken, daß man sagt, V : v sei aus

dem geraden Verhältnisse m : n und dem umgekehr-

ten Verhältnisse D : d zusammengesetzt.

§. 421.

Aus der letzten Proportion sehen wir, daß das Verhältniß  $V : v$  von dem Verhältnisse  $d : D$  mit abhängt, und nicht eher ganz deutlich angegeben werden kan, als bis auch das Verhältniß für den Fall, da sich die beiden Kugeln verhalten wie  $m : n$  deutlich entwickelt oder folgende Aufgabe aufgelöst ist.

§. 422.

XCVI. Aufgabe.

Aus dem gegebenen Verhältnisse  $m : n$  zweier Kugeln  $K$  und  $k$  das Verhältniß ihrer Durchmesser  $D : d$  zu bestimmen.

§. 423.

Auflösung.

Es ist  $K : k = D^3 : d^3$ , folglich auch  $m : n = D^3 : d^3$ ; daher auch (§. 312.)  $\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} = D : d$ .

§. 424.

Wird nun in die (§. 421.) gefundene Proportion

$$V : v = md : nD$$

stat  $d : D$  das gleiche Verhältniß  $\sqrt[3]{n} : \sqrt[3]{m}$  geschrieben; so erhält man

$$V : v = m\sqrt[3]{n} : n\sqrt[3]{m}, \text{ oder}$$

$$V : v = m\sqrt[3]{\frac{n}{m}} : n.$$

§ 3

§. 425.

## 278 Sechszehntes Kapitel.

§. 425.

Wäre daher gegeben  $m:n = 2:1$ ; so würde  

$$V:v = 2 \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} : 1 = 2 : 1 = 2 : \sqrt[3]{2}.$$
 Da nun

ungefähr  $\sqrt[3]{2} = 1,259$  ist;  
 so sehen wir hieraus, daß die Umfläche einer Kugel  $k$ , welche nur halb so groß ist als  $K$ , mehr als die Hälfte der Umfläche von  $K$  beträgt. Wird gegeben  $m:n = 16:1$ , so wird  $V:v = 16 \cdot \frac{1}{4} : 1 = 4:1$ , also die Umfläche einer Kugel  $k$ , welche 16 mal so klein ist als  $K$ , nur 4 mal kleiner sein als die Umfläche von  $K$ .

§. 426.

### XCVII. Aufgabe.

Ein Rechteck zu verzeichnen, dessen Perimeter  $= P''$  und dessen Flächenraum  $= F''$  sei.

#### Vorbereitung.

Zwei aneinander liegende Seiten eines Rechteckes machen den halben Perimeter aus. Sezen wir daher die eine von solchen zwei Seiten, welche man zugleich auch als die Basis ansehen kan,  $= x$ , so mus die andere Seite, oder die Höhe,  $= \frac{P}{2} - x$  sein. Der Flächenraum dieses Rechteckes beträgt alsdan  $x \left( \frac{P}{2} - x \right)$ ; so daß nach den Forderungen unserer Aufgabe  $x$  vergestalt zu nehmen ist, daß

daß  $x \left( \frac{P}{2} - x \right) \square'' = F \square''$ , also überhaupt  
 $x \left( \frac{P}{2} - x \right) = F$  werde.

Der Flächenraum von  $F \square''$  kan allemal durch  
 ein Quadrat angegeben werden, dessen Seite, welche  
 $F$  heissen sol, so groß genommen wird, daß  $ff = F$   
 wird. Wenn wir nun noch der Bequemlichkeit  
 wegen  $P = p$  setzen; so haben wir

§. 427.

Auflösung.

folgende Gleichung  $x (p - x) = ff$  aufzu-  
 lösen.

$$\text{das ist } px - x^2 = f^2$$

$$\text{daher } x^2 - px = -f^2$$

$$\text{daher } x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - f^2}$$

§. 428.

Berechnung in Zahlen.

Es sei  $F = 9 \square''$ ,  $P = 20''$ ; so ist  $f = 3''$   
 $p = 10''$ , folglich  $x = 5 + \sqrt{\frac{100}{4} - 9} = 5$   
 $+ \sqrt{16} = 5 + 4$ , und es kan genommen werden  
 entweder 1) die Basis  $x = 9''$ ; in dem Falle bleibt  
 für die anliegende Seite oder Höhe  $p - x$  noch  
 $10 - 9 = 1''$  übrig: oder es kan genommen wer-  
 den die Basis  $x = 5 - 4 = 1''$ , in welchem Falle  
 die Höhe  $p - x = 10 - 1 = 9''$  wird. In bei-  
 den Fällen erhalten wir ein Rechteck, dessen Qua-  
 drat

Inhalt  $= 9\text{Q}''$  und dessen ganzer Perimeter  $= 20''$  ist.

## §. 429.

## Bestimmung dieser Aufgabe.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe nicht bei allen Werthen der Größen  $P$  und  $F$  möglich bleiben kan. Wie wäre es z. B. wohl möglich, ein Rechteck anzugeben, dessen Inhalt  $100\text{Q}''$  und dessen Perimeter etwa nur  $4''$  sein sollte.

Aus der §. 427. entwickelten Formel  $x = \frac{p}{2} +$

$\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$  lassen sich auch die Gränzen dieser Möglichkeit gar leicht bestimmen. Wir wissen nämlich aus §. 283. daß die Gröſſe  $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)}$

unmöglich ist, wenn  $\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)$  negativ wird.

Da nun dies geschieht, sobald  $f^2$  größer als  $\frac{p^2}{4}$  wird; so kan  $f^2$  aufs höchste nur  $= \frac{p^2}{4}$  genommen werden, ohne daß die Aufgabe unmöglich wird.

Die andere Gröſſe  $p$  hingegen mag so groß genommen werden, als man nur immer wil; so wird die Wurzel aus  $\frac{p^2}{4} - f^2$  nie unmöglich werden, ob sie gleich in den mehesten Fällen eine  
irra.

irrationale Größe sein wird. Und in der That kan auch allemal ein Rechtek angegeben werden, welches bei einem jeden verlangten Perimeter einen auch noch so kleinen gegebenen Flächenraum einschließt. So wird z. B. ein Rechtek, dessen Basis 25' und dessen Höhe 1''' ist, nur eine Fläche von  $25\frac{1}{4}$ '' oder  $\frac{1}{4}$ '' , und gleichwohl einen Perimeter von 50'2''' haben.

Daß aber  $\underline{p^2}$  nicht kleiner als  $f^2$  sein darf, liegt schon in der vorigen Bestimmung, nach welcher  $f^2$  nicht größer als  $\underline{p^2}$  werden sollte.

§. 430.

Wenn  $f^2 = \underline{p^2}$  genommen wird, so wird

$r\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right) = 0$ , folglich die eine Seite  $x = \frac{p}{2}$ , also auch die andere Seite  $p - x$  ebenfalls  $= \frac{p}{2}$ , so daß das verlangte Rechtek in diesem

Falle ein Quadrat wird. Hieraus folgt der Satz, daß unter allen Rechteken das Quadrat dasjenige ist, welches mit dem kleinsten Perimeter den größten Flächenraum einschließt.

§. 431.

Geometrische Konstruktion

Der Formel  $x = p \mp r\left(\frac{p^2}{4} - f^2\right)$   
§ 5
Man

## 282 Sechszehntes Kapitel.

Man nehme Fig. 29.  $AB = p$ , beschreibe mit  $AD = f$  einen Kreis, desgleichen mit  $AC = AB$  einen andern Kreis, und ziehe die  $DB$ : so wird, weil  $ADB = R$ ,  $DB^2 = AB^2 - AD^2$ , folglich  $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{p^2 - f^2}$ , daher des verlangten Rechteckes Basis  $x = AB + DB$ , die Höhe  $p - x = 2AB - AB - DB = AB - DB$  sein.

Außer dem Schnelbungspunkte  $D$  fällt noch ein anderer bei  $\delta$  in die Augen, und zwar so, daß die  $B\delta$  der  $BD$  vollkommen gleich, aber der Lage nach gerade entgegengesetzt ist; indem  $BD$  nach oben hinauf,  $B\delta$  aber nach unten herunter liegt. Auf diese Weise wird in dieser Zeichnung durch die  $BD$  die positive, durch die  $B\delta$  aber die negative Wurzel angegeben. Gebraucht man diese negative Wurzel; so wird die Basis  $x = AB - BD$ , also nunmehr die Basis so groß, als vorher beim Gebrauch der positiven Wurzel die Höhe ward, hingegen die Höhe  $p - x = 2AB - (AB - B\delta) = 2AB - AB + BD = AB + BD$ , folglich in diesem Falle die Höhe so groß, als beim Gebrauch der positiven Wurzel die Basis. Beide Rechtecke erfüllen die Forderungen der Aufgabe, decken einander, und haben nur eine verschiedene Lage.



§. 432.

Die  $AD (= f)$  mag so klein genommen werden, als man nur immer wil, so wird der damit beschriebne Kreis doch immer den mit  $AC$  beschriebnen Kreis in 2 Punkten schneiden, und zwar so, daß die  $BD$  und  $B\delta \left( = +\sqrt{p^2 - f^2} \right)$  immer größer werden, so wie die  $AD$  immer kleiner genommen wird. Wird endlich die  $AD = 0$  angenommen, so mus auch der ganze mit  $AD$  beschriebne Cirkelfreis in dem Punkte  $A$ , und auch seine beiden Schnaidungspunkte  $D, \delta$  in  $A$  zusammenfallen. In diesem Falle erhält die  $BD$  ihren größten Werth, und wird  $= AB = P$ . Alles dieses stimmt mit denen über die algebraische Formel angestellten Betrachtungen vortreflich überein.

§. 433.

Je größer im Gegentheil die  $AD$  genommen wird, um desto kleiner wird  $BD$  und  $B\delta$ . Beide Punkte  $D$  und  $\delta$  fallen in  $B$  zusammen, wenn  $AD = AB$  genommen wird, indem in diesem Falle der mit  $AD$  beschriebene Kreis den andern mit  $CA$  beschriebnen Kreis nur in dem einzigen Punkte  $B$  berührt. Dieser Werth von  $AD$  ist auch der höchste Werth, bei welchem die Aufgabe noch möglich bleibt. Denn sobald  $AD$  nur etwas größer als  $AB$  genommen wird; so wird der mit  $AD$  beschriebne Kreis mit dem andern Kreise gar kein Punkt mehr gemeinschaftlich haben. Auf diese Weise lehrt auch diese Zeichnung den Satz, daß die Wurzel aus einer negativen Größe unmöglich ist.



Siebs



## Siebzehntes Kapitel.

### Aufgaben, welche zur Trigonometrie vorbereiten.

§. 434.

**W**enn ich einen Winkel NBM verzeichne, Fig. 30. und aus einem beliebigen Punkte A des einen Schenkels eine Linie A C unter einem gewissen, z. B. unter einem rechten Winkel auf den andern Schenkel BM ziehe; so findet zwischen den beiden Linien AC und CB eine gewisse Verhältniß statt, welche für einerlei Winkel NBM sich beständig gleich bleibt, ich mag den Punkt A noch so weit von B, oder noch so nahe an B nehmen. Denn nehme ich z. B. diesen Punkt in A', so wird, wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke (Num. 38.) ABC und A'BC', sich verhalten  $AC:CB = A'C':C'B$ , und eben so, wenn das Punkt im A'' genommen würde, auch sein  $AC:CB = A''C'':C''B$ . Sobald aber stat des Winkels NBM ein größerer oder kleinerer Winkel genommen wird; so wird das Verhältniß dieser beiden Linien sich ändern, und z. B. bei einem kleinern Winkel nBm das Verhältniß dieser beiden senkrechten Linien a C : B. C, oder a'C' : BC', oder a''C'' : BC'' größer sein, als AC : BC, das ist, es wird a C in B C öfter enthalten sein, als A C in B C.

§. 435.

§. 335.

Für einen Winkel  $NBM = 45^\circ$  wird sein  $AC : BC = 1 : 1$ , wie gar leicht aus geometrischen Gründen erhellet, und umgekehrt kan ich versichert sein, daß  $ABC = 45^\circ$  sein müsse, wenn die beiden unter einen rechten Winkel aneinander gesetzten Linien  $AC$  und  $BC$  einander gleich gemacht sind, oder welches einerlei ist, sich verhalten wie  $1 : 1$ .

§. 436.

Wird  $NBM = 47^\circ$  genommen; so wird man finden, daß ohngefähr  $AC : CB = 3 : 4$ ; und wenn  $NBM = 26^\circ 34'$  genommen wird, ohngefähr  $AC : BC = 1 : 2$  sein, und so stehen diese beiden Linien für einen jeden Winkel in einem eignen zu diesem Winkel gehörigen Verhältnisse.

§. 437.

Werden nun wiederum zwei Linien,  $QS, SR$ , in der Verhältniß  $3 : 4$  unter einen rechten Winkel, Fig. 31. zusammengesetzt; so mus  $QRS = 37^\circ$ ; wenn sich aber Fig. 32.  $QS : SR$  verhält wie  $1 : 2$ , der Winkel  $QRS = 26^\circ 34'$  sein: wovon man sich auf folgende Weise allgemein überzeugen kan.

§. 438.

Durch die gezogene Normale  $AC$ , Fig. 30. entsteht ein rechtwinkliger Triangel  $ABC$ . Wird nun

## 286 Siebzehntes Kap. Aufgaben,

nun Fig. 31. auch  $QSR = R$  und  $QS:SR = AC:CB$  gemacht; so mus  $\triangle QSR \sim \triangle ACB$ , folglich auch der Winkel  $QRS = ABC$  werden. Beide Triangel werden auch ähnlich, sobald nur  $QS:SR = AC:CB$  und die Winkel  $QSR$  und  $ABC$  einander gleich gemacht werden, wenn es auch nicht gerade rechte Winkel sind.

§. 439.

### XCVIII Aufgabe.

Die Höhe der Sonne über dem Horizonte zu finden.

§. 440.

Vorbereitung.

Der Bogen  $ACBD$  Fig. 33. sei ein Theil des Cirkelkreises, welcher über die ganze Umfläche der Erdfugel durch die Punkte  $C$  und  $B$  ohne merkliche Abweichung gezogen werden kan, in welchem Punkte  $B$  eine Stange  $BG$  perpendicular auf die Horizontallinie  $HR$  eingesteckt ist: so ist  $BC$  die Länge des Schattens, wenn die Sonne um den Bogen  $DR$ , oder welches einerlei ist, um so viel Grade als der Winkel  $o$  enthält, über dem Horizont erhaben ist. Für einen höhern Stand der Sonne in  $s$  würde der Winkel  $dCB$  die Höhe der Sonne, das ist, die Zahl der Grade des Bogens  $dDR$  angeben.

§. 441.

§. 441.

Auflösung.

Man messe die Länge der Stange BG und des Schattens BC, und verzeichne auf dem Papiere die Linien kβ und βγ Fig. 34. dergestalt, daß bei β ein rechter Winkel ist, und beide Linien eben so viel Ruthen, Schuhe, Zoll nach irgend einem verjüngten Maßstabe, als BG und BC einem größern haben. Man ziehe noch darauf die kβ; so wird der Winkel γkβ, welchen man durch Transporteur messen kan, die Höhe der Sonne angeben.

§. 442.

B e w e i s.

Es enthält γβ eben so viel Ruthen, Schuhe, ic. in verjüngtem Maße als GB im ordentlichen; folglich ist γβ gerade so viele male kleiner, als GB, als vielmals eine Ruthe (also auch ein Zehntel und Hundertel einer Ruthe) in dem verjüngten Maße kleiner ist, als eine Ruthe (ein Zehntel und Hundertel einer Ruthe) im wahren Maße: das heißt, es verhält sich

$GB : \gamma\beta = \text{wie das wahre Maß} : \text{zum verjüngten.}$

Eben so verhält sich auch

$BC : \beta k = \text{wie das wahre Maß} : \text{zum verjüngten.}$

Also ist  $GB : \gamma\beta = BC : \beta k$

daher auch  $GB : BC = \gamma\beta : \beta k$

ferner ist  $\sphericalangle GBC = \gamma\beta k$

folglich N. 39.  $\triangle BCG \sim \beta\gamma k$

also  $\sphericalangle \gamma = \gamma k \beta.$

§. 443

## §. 443

Wir wollen hierbei noch folgende kleine Bemerkung machen. Wenn die Sonne gerade so hoch wie ohngefähr in  $s$  steht, so daß der Winkel  $GcB = 45^\circ$  wird; so bleibt, da  $GBc = 90^\circ$  für  $BGc$  ebenfalls  $45^\circ$ , also müssen  $BG$  und  $Bc$  zwei gleiche Schenkel sein, so daß man bei dieser Höhe der Sonne von  $45^\circ$  die Höhe eines Thurmes, Baumes, u. d. sehr leicht erforschen kan, indem die geworfenen Schatten den Höhen selbst gleich sind. Wenn die Sonne, und ob sie diesen Stand habe, das kan man entweder aus den gehörigen Büchern und astronomischen Gründen, oder dadurch erfahren, daß man an irgend einem vertikal stehenden Stabe, oder einer jeden andern Höhe, die man unmittelbar messen kan, den Versuch macht, ob dabei der Schatten der Höhe gleich sei. Denn in dem Augenblicke, da dies bei irgend einer Höhe zutrifft, geschieht es bei allen andern nicht gar zu weit entfernten Höhen.

## §. 444

## XCIX. Aufgabe.

Aus der gegebenen Grundlinie  $AC$ , Fig. 26. und den beiden anliegenden Winkeln  $BAC$  und  $BCA$  die Höhe des Dreieckes  $BD$  zu bestimmen.

## §. 445.

§. 445.

Auflösung.

Man setze  $AC = b$  und  $BD = x$ .

Da mir der Winkel  $BAC$  gegeben ist, so kan ich, auch das zu diesem Winkel gehörige Verhältnis  $BD : AD$  als ein bekantes Verhältnis betrachten und der kürzern Schreibart wegen ausdrücken durch  $f : g$ . Eben so kan ich auch das durch den Winkel  $BCA$  bestimmte Verhältnis  $BD : DC$  gleich setzen  $p : q$ ; dergestalt, daß

$f : g = BD : AD$ , und  $p : q = BD : DC$ , daher

$$AD = \frac{gx}{f}, \text{ und } DC = \frac{qx}{p},$$

folglich, da  $AD + DC = AC$ ,

$$\text{auch } \frac{gx}{f} + \frac{qx}{p} = b \text{ wird,}$$

$$\text{daher } pgx + fqx = bfp$$

$$x = \frac{bfp}{pg + fq}$$

§. 446.

Nach dieser Formel kan  $x$  in Zahlen berechnet und angegeben werden, wenn außer der Linie  $b$  auch die Verhältnisse  $f : g$  und  $p : q$  in Zahlen angegeben sind. Die geometrische Auflösung dieser Aufgabe ist ungemein leicht, indem man nur den durch die Grundlinie und die beiden anliegenden Winkel bestimmten Triangel zu beschreiben, und die aus der Spitze dieses Triangels auf die Grundlinie

normal.

## 290 Siebenzehntes Kap. Aufgaben,

normalfallende Linie zu ziehen braucht. Aber die Berechnung in Zahlen nach einer solchen durch algebraische Auflösung gefundenen Formel hat öfters einen ungemeinen Vorzug vor einer solchen geometrischen Verzeichnung. Denn wenn etwa die in einer solchen Zeichnung vorkommenden Linien sehr beträchtliche Weiten auf dem Felde, oder gar noch größere Entfernungen zwischen den Weltkörpern vorstellen müßten; so würden die kleinsten Fehler, welche sich in einer so sehr verjüngten Zeichnung dem Auge gänzlich entziehen, doch im wahren Maße gar beträchtliche Größen sein können. Diese Fehler würden nun freilich auch durch eine nach unserer Formel vorgenommene Berechnung nicht vermieden werden, wenn man die in Zahlen anzugebenden Verhältnisse  $f:g$ ,  $p:q$ , durch Verzeichnung der Linie AD, DB, DC, DB erst finden müßte: Aber man hat schon die Verhältnisse solcher Linien für jeden bis auf Minuten und noch weiter bestimmten Winkel nicht nach Zeichnungen abgemessen, sondern nach Schlüssen mit sehr großer Genauigkeit in den trigonometrischen Tafeln berechnet, durch deren Gebrauch wir auch solche Fehler vermeiden können, welche nur der Verstand noch begreifen, das Auge nicht mehr entdecken kan.

§. 447.

Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, worin ein Glied von dem nächstvorhergehenden um eben so viel unter-



## welche zur Trigonometrie vorher. 291

terschieden ist, als ein jedes anderes Glied von dem ihm nächstvorhergehenden, heißt eine arithmetische Reihe oder Progression, z. B.

1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, wo der Unterschied 3 ist.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, — — 2 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, — — 1 ist.

### §. 448.

Hieraus sieht man sogleich ein, daß man eine arithmetische Reihe nach Belieben fortsetzen kan, sobald nur ein Glied und der Unterschied dieses Gliedes von dem ihm nächstfolgenden Gliede gegeben sind, und daß folgende Reihe

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d$  &c.

wo  $a$  das erste Glied und  $d$  die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder bedeutet, die allgemeine Form einer arithmetischen Reihe ist, welche z. B. zu folgender Reihe, 4, 7, 10, 13, 16 &c. wird, wenn  $a = 4$  und  $d = 3$  gesetzt wird, und zu folgender Reihe, 1, 6, 11, 16, 21, &c. wird, wenn man  $a = 1$ , und  $d = 5$  sezet.

### §. 449.

#### C. Aufgabe.

Aus dem ersten Gliede  $a$ , der Differenz zweier Glieder  $d$  und der Anzahl der Glieder das letzte Glied einer arithmetischen Progression zu finden.

Ch:  $a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d$  &c. §. 450.

## 192 Siebenzehntes Kap. Aufgaben.

§. 450.

Auflösung.

Aus der allgemeinen Form der arithmetischen Reihe erhellet sogleich, daß das 2te Glied  $= a + d$ , das 3te  $= a + 2d$ , das 4te  $= a + 3d$ , also das nte Glied, welches zugleich das letzte Glied in einer Reihe von n Gliedern ist,  $= a + (n - 1)d$  sei.

§. 451.

Wenn wir daher das letzte Glied  $u$  nennen, so erhalten wir 1)  $u = a + (n - 1)d$ , eine Formel, welche die Verbindung der vier Zahlen  $u$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $d$  dergestalt darstellt, daß man eine jede von diesen vier Zahlen finden kan, sobald die drei andern angegeben sind. Denn es ergeben sich aus dieser Gleichung auch folgende 2)  $n = \frac{u - a}{d} + 1$

$$3) a = u - (n - 1)d = u - dn + d$$

$$4) d = \frac{u - a}{n - 1}$$

§. 452.

Schreibt man unter einer arithmetischen Reihe dieselbe Reihe rückwärts, und addirt die untereinanderstehenden Glieder . . .)

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d,$$

$$a + 4d, a + 3d, a + 2d, a + d, a ; ; ;$$

so erhält man

$$2a + 4d, 2a + 4d, 2a + 4d, 2a + 4d, 2a + 4d, \text{ und}$$

es

es ist offenbar, wenn  $S$  die Summe aller Glieder in einer dieser Reihen bedeutet,  $2S = 5(2a + 4d)$ . Wenn die Reihe stat 5 Glieder 6 Glieder hätte, würde sein  $2S = 6(2a + 5d)$ , und wenn  $n$  die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Reihe bedeutet; so ist  $2S = n(2a + (n-1)d)$

oder  $2S = n(a + a + (n-1)d)$ , oder

da  $a + (n-1)d = u$  (§. 451.)

auch  $2S = n(a + u)$

und  $S = \frac{n}{2}(a + u)$

§. 453.

Nach dieser Formel kan die Summe  $S$  einer arithmetischen Reihe gar leicht berechnet werden, wenn die Anzahl der Glieder  $n$ , das erste Glied  $a$  und das letzte Glied  $u$  gegeben sind. Und da nach der Formel bei 1) §. 451. das letzte Glied  $u$ , aus  $a, n, d$ , bestimmt ist, so kan auch  $S$  aus  $a, n, d$ , gefunden werden, wenn auch  $u$  nicht gegeben ist. Denn indem man in die Formel  $S = \frac{n}{2}(a + u)$  stat  $u$ , den bei 1) §. 451. bestimmten Werth desselben  $a + (n-1)d$  schreibt; so erhält man eine Gleichung, worin  $S$  aus den 3 Zahlen  $a, n, d$  bestimmt ist. Und da nach der Formel bei 2)  $n$  aus  $u, a, d$  bestimmt ist; so kan auch  $S$  aus  $a, u, d$ ; da in der Formel bei 3)  $a$  aus  $u, n, d$  bestimmt ist, auch  $S$  aus  $u, n, d$ ; da ferner nach der Formel bei 4)  $n$  aus  $u, a, d$  bestimmt ist, auch  $S$  aus  $u, a, d$  gefunden werden.

§ 3

§. 454.

## 294 Siebenzehntes Kap. Aufgaben,

§. 454.

### CI. Aufgabe.

Man kauft ein Pferd, mit der Bedingung, daß man für den ersten Hufnagel 8 Gr. für den 2ten 12 Gr. für den 3ten 16 Gr. u. s. w. für jeden folgenden Hufnagel, deren in allen 32 sind, immer 4 Gr. mehr bezahlt: wie hoch wird das Pferd zu stehen kommen?

§. 455.

### Auflösung.

Der Preis des Pferdes ist offenbar die Summe  $S$ , einer arithmetischen Reihe von 32 Gliedern, deren erstes Glied  $a = 8$  und Differenz  $d = 4$  ist. Die Formel  $S = n \frac{(a + u)}{2}$  kan uns daher zur Auflösung unserer Aufgabe nicht unmittelbar dienen, weil in unserer Aufgabe das letzte Glied  $u$  nicht gegeben ist. Schreiben wir aber in diese Formel stat  $u$  den bei 1) §. 451. aus  $a$ ,  $n$  und  $d$  bestimmten Werth desselben,  $a + (n - 1)d$ , so erhalten wir  $S = n \frac{(2a + (n - 1)d)}{2}$ , wonach für unsere Aufgabe wird  $S = 16 (16 + 31 \cdot 4) = 2240$  Gr.  $= 93$  Rthlr. 8 Gr.

§. 456.

### CII. Aufgabe.

Zertheile 14 in 7 Theile, wovon jeder Theil um  $\frac{1}{3}$  größer ist als der nächstvorhergehende.

§. 458.

§. 457. Auflösung.

Diese 7 Theile müssen offenbar eine arithmetische Progression ausmachen, deren Summe  $S = 14$ , Anzahl der Glieder  $n = 7$  und Differenz  $d = \frac{1}{3}$  ist. Diese Reihe kan gebildet werden, sobald nur außer der schon gegebenen  $d$  noch das erste Glied  $a$  gefunden ist. Nach der Formel  $S = \frac{n}{2} (a + u)$

kan dieses  $a$  noch nicht sogleich bestimmt werden, weil diese Formel auch noch eine andere uns unbekannte Zahl  $u$  enthält, schreiben wir aber nach §. 451. stat  $u$  den Werth desselben  $a + (n - 1) d$  in diese Formel; so erhalten wir  $2S = n(a + a + (n - 1) d)$ , eine Gleichung, worin außer denen uns bekannten Zahlen  $S, n, d$  nur noch die eine unbekannte  $a$  enthalten ist: Diese  $a$  kan also nunmehr allerdings aus dieser Gleichung bestimmt werden, indem man die  $a$  auf die eine Seite, alle übrige bekannte Zahlen aber auf die andere Seite bringt. Es ergiebt sich durch die gewöhnlichen Veränderungen nach und nach

$$2S = 2na + dn^2 - dn$$

$$a = \frac{2S + dn - dn^2}{2n}$$

$$a = \frac{2S}{2n} + \frac{d(n - n^2)}{2n}$$

$$a = \frac{S}{n} + \frac{dn(1 - n)}{2n}$$

$$a = \frac{S}{n} + \frac{d(1 - n)}{2}$$

$$a = \frac{S}{n} - \frac{(n - 1)d}{2}$$

§ 4

Demnach

$$a = 2 - \frac{6}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$a = 1$$

## 296 Siebenzehntes Kap. Aufgaben;

Demnach wird in unsrer Aufgabe  $a = \frac{1}{2}$   
 $— (7—1)d = 1$  zu nehmen, und die verlangte  
 Progression folgende sein

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3.$$

### §. 458.

Wenn die Differenz einer arithmetischen Reihe  
 negativ, oder  $— d$  gesetzt wird, so wird jedes fol-  
 gende Glied um  $d$  kleiner als das vorhergehende;  
 die allgemeine Form dieser Reihe ist folgende:

$$a, a — d, a — 2d, a — 3d, a — 4d \text{ \&c.}$$

und eine solche Reihe heist eine abnehmende Reihe,  
 so wie die vorige §. 448. eine wachsende Reihe genant  
 wird.

### §. 459.

Es ist offenbar, daß alle von §. 450. bis §.  
 453. für die wachsende Reihe geführten Schlüsse  
 und Formeln, auch für diese abnehmende Reihe gel-  
 ten, wenn man nur anstatt  $+ d$  stat  $— d$ ,  
 also auch umgekehrt  $— d$  stat  $+ d$  schreibt.

3. B. Da in einer wachsenden Reihe das  
 letzte Glied  $u = a + (n — 1)d$  ist; so wird in einer  
 abnehmenden Reihe das letzte Glied  $u = a — (n — 1)d$ ,  
 welches gerade der Werth des ersten Gliedes in  
 einer wachsenden Reihe ist. Daß die seine völlige  
 Richtigkeit habe, übersehen wir leicht, da eine jede  
 wachsende Reihe zu einer abnehmenden Reihe wird,  
 wenn man sie rückwärts nimmt, und also das letzte  
 Glied

Glied zum ersten, und das erste Glied zum letzten macht.

§. 460.

Die Formel  $S = \frac{n}{2} (a + u)$  bleibt, weil  $d$  gar nicht darin vorkömmt, ganz unverändert, und man wird diesemnach sowohl die Summe einer abnehmenden als wachsenden Reihe allemal richtig finden, wenn man die Summe aus dem ersten und letzten Gliede durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt. Auch dis ist vollkommen richtig. Denn wenn diese Formel für eine abnehmende Reihe gilt; so ist  $u$  darin eben so groß als das erste Glied in einer wachsenden Reihe von gleich vielen Gliedern, dessen erstes Glied  $a$  und letztes Glied  $u$  ist. Es mus aber allerdings z. B.

$a + a + d \quad + \quad a + 2d \quad + \quad a + 3d =$   
 $a + 3d + a + 3d - d + a + 3d - 2d + a + 3d - 3d$   
 sein.

§. 461.

### CIII. Aufgabe.

Mehrere Soldaten werden wegen Ersteigung einer Batterie dergestalt belohnt, daß der zweite etwas weniger als der erste, der dritte um eben so viel weniger als der zweite, u. s. w. jeder folgende um eben so viel weniger bekömmt. Bei der Vertheilung konten zwei von den Theilnehmenden nicht zugegen sein; man gab daher den Antheil des einen Abwesenden mit an seinen guten Freund,

§ 5

welcher

## 298 Siebenzehntes Kap. Aufgaben,

welcher der 5te war, und den Antheil des andern Abwesenden an einen andern Soldaten, welcher der 10te war. Der 5te Soldat hatte für sich und seinen Freund, den 7ten Soldaten, 8 Rthlr. 8 Gr. der 10te Soldat für sich und seinen Freund, den 12ten, 6 Rthlr. 16 Gr. bekommen. Wie viel musste ein jeder an seinen Freund abgeben?

§. 462.

Die ausgetheilten Belohnungen machen in der Ordnung eine abnehmende Reihe aus. Wenn wir das erste Glied dieser Reihe  $a$  Gr., ihre Differenz  $-d$  Gr. setzen; so betrug das 5te Glied, welches der Antheil des 5ten Soldaten war,  $a - 4d$ , und der Antheil seines Freundes, des 7ten Soldaten  $a - 6d$ , des 10ten Soldaten  $a - 9d$ , und des 12ten  $a - 11d$ . Folglich mus  $a$  und  $d$  dergestalt angenommen werden, daß

$$\text{I) } 2a - 10d = 8 \text{ Rthlr. } 8 \text{ Gr. und}$$

$$\text{II) } 2a - 20d = 6 \text{ Rthlr. } 16 \text{ Gr. wird,}$$

das ist,  $2a - 10d = 192 \text{ Gr. } 2a - 20d = 160 \text{ Gr.}$

Die zweite Gleichung von der ersten abgezogen, das ist

$$\begin{array}{rcl} \text{zu} & 2a - 10d & = & 200 \\ \text{addirt} & - 2a + 20d & = & - 160 \end{array}$$

$$\text{gibt} \quad 10d = 40,$$

$$\text{folglich} \quad d = 4.$$

Aus der Gleichung  $2a - 10d = 200$  ergibt sich, daß  $a = \frac{200 + 10d}{2} = 100 + 5d$ , folg-

lich



## welche zur Trigonometrie vorher. 299

sich  $a = 120$  sein muß, und aus diesem ersten Gliede und der Differenz erhalten wir folgende abnehmende Reihe, woraus man das 5te, 7te, 10te, 12te Glied gebraucht:

1. 2. 3. 4. 5. . . . . 7. . . . . 10 . . . 12.  
120, 116, 112, 108, 104, 100, 96 . . . . . 84 . . . 76.

§. 463.

Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, in welcher jedes Glied zum nächstfolgenden einerlei Verhältnis hat, heißt eine geometrische Reihe. Z. B.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

In dieser Reihe verhält sich z. B. das 3te Glied zum 4ten wie das 4te zum 5ten: denn es ist  $4 : 8 = 8 : 16 (= 1 : 2)$ . Auch ist  $16 : 32 = 32 : 64 (= 1 : 2)$ .

§. 464.

In folgender Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 &c. verhält sich ein jedes Glied zu dem nächstfolgenden, wie 1 : 3.

Diese Zahl 3, welche anzeigt, um wie viel mal ein jedes Glied grösser ist, als das nächstvorhergehende, wird der Exponent der Progression genant, welches in der im vorigen §. angegebenen Reihe die Zahl 2 war. Wird daher dieser Exponent allgemein durch  $e$ , und das erste Glied durch  $a$  angedeutet; so giebt folgende Reihe

$a, ae, aee, aeee, aeeee, aeeee &c.$   
oder  $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5 &c.$

die allgemeine Form der geometrischen Reihe.

§. 465.

## 300 Siebenzehntes Kap. Aufgaben,

§. 465.

### CIV. Aufgabe.

Die Summe einer geometrischen Reihe von 5 Gliedern zu finden.

§. 466.

#### Auflösung.

Die Reihe sei  $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4$ , und die gesuchte Summe sei  $S$ , dergestalt, daß

$$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4; \text{ so wird auch } S(e-1) = (e-1)(a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4)$$

das ist

$$\frac{a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4}{e-1}$$

$$\frac{ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 - a - ae - ae^2 - ae^3 - ae^4}{e-1}$$

$$S(e-1) = ae^5 - a \quad \text{da-}$$

her

$$S = \frac{(e^5 - 1)a}{e-1} \text{ sein.}$$

§. 467.

Hätte diese Reihe stat 5 Glieder 6 Glieder; so würde gefunden  $S = \frac{(e^6 - 1)a}{e-1}$

In einer Reihe von 7 Gliedern wird  $S = \frac{(e^7 - 1)a}{e-1}$

und überhaupt in einer Reihe von  $n$  Glieder  $S = \frac{(e^n - 1)a}{e-1}$  sein.

§. 468.

§. 468.

CV. Aufgabe.

Der Erfinder des Schachspiels wünschte, daß man ihm für das erste Feld seines Schachbrettes 1 Gerstenkorn, für das zweite 2, für das dritte 4, u. s. w. für jedes folgende Feld immer doppelt so viel Körner geben mögte. Wie viel Körner würde er hiernach erhalten haben, wenn sein Brett 64 Felder hätte?

§. 469.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl ist offenbar die Summe einer geometrischen Progression von 64 Gliedern, deren erstes Glied 1, und deren Exponent 2 ist. Wird nun in der allgemeinen Formel  $S = \frac{(e^n - 1)a}{e - 1}$

1 stat a, 64 stat n, und 2 stat e geschrieben; so ergibt sich für unsere Aufgabe der Werth von  $S = 2^{64} - 1$ , das ist,

$$S = 18''446744''073709'551615.$$

Diejenigen Lehren der arithmetischen und geometrischen Reihen, nebst denen leichten Lehrsätzen der arithmetischen Proportion, welche zur Erklärung der Logarithmenrechnung unentbehrlich sind, können nunmehr aus einem jeden Lehrbuche der Geometrie erlernt werden.



Achts

## Achtzehntes Kapitel.

### Auflösung einiger unbestimmten Aufgaben.

§. 470.

**W**ie allemal eine unbekante Zahl aus einer Gleichung, 2 unbekante Zahlen aus 2 Gleichungen, 3 unbekante Zahlen aus 3 Gleichungen u. s. w. bestimmt werden, ist bisher in vielen Auflösungen gezeigt. Wenn aber die Forderungen einer Aufgabe nicht anders als durch 2 unbekante Zahlen ausgedrückt werden können, und man doch aus allen Forderungen der Aufgabe nur eine einzige Gleichung herleiten kan; oder, wenn die Bedingungen einer Aufgabe sich auf 3 unbekante Zahlen beziehen, und doch nur 2 Gleichungen geben, oder sich auf 4 unbekante Zahlen beziehen, und doch nur 3 Gleichungen geben, u. s. w. so lassen sich die unbekannten Zahlen nicht allemal genau bestimmen, und diese Aufgaben heißen daher unbestimmte Aufgaben. Noch viel unbestimmter kan eine Aufgabe werden, wenn ihre Bestimmungen etwan nur 2 Gleichungen geben, und doch nicht ohne 4 unbekante Zahlen ausgedrückt werden können, 2c.

§. 471.

§. 471.

CYL. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 7 ist.

§. 472.

Auflösung.

Nennen wir die eine Zahl  $x$ , die andere  $y$ ; so ist die Forderung der Gleichung folgende: daß  $x + y = 7$  sei. Alle Bedingungen der Aufgabe sind durch diese eine Gleichung erschöpft, und gleichwohl kan man sich diese Bedingung nicht ohne zwei unbekante Zahlen vorstellen. Bringen wir  $y$  auf die andere Seite; so erhalten wir die Gleichung  $x = 7 - y$ , welche uns auf eine sehr deutliche Weise überschen läßt, wie die eine der unbekannten Zahlen von der andern abhängt, und welchen Werth die  $x$  bekommen mus, sobald wir der  $y$  einen von denen unzähligen Werthen, welche sie haben kan, wirklich bestimmen. Wenn wir z. B. annehmen wollen,  $y = \frac{1}{2}$ ; so mus sein  $x = 5\frac{1}{2}$

für  $y = 1$  wird  $x = 6$

für  $y = \frac{3}{4}$  wird  $x = 5\frac{1}{4}$

für  $y = -2$  wird  $x = 9$  sein müssen. Es ist unmöglich, alle die unendlich vielen Paare von Zahlen anzugeben, welche dieser Aufgabe Genüge leisten. Werden aber von diesen Zahlen die gebrochenen und negativen Zahlen ausgeschlossen, und wollen wir die Forderung der Aufgabe auf ganze Zahlen einschränken;

## 304 Achtzehntes Capit. Auflösung

schränken; so wird die Anzahl der noch übrigen Werthe leicht zu übersehen sein. Es kan nämlich nach dieser Einschränkung  $y$  nicht kleiner als 1, und nicht größer als 6 genommen werden, und also nur sein

entweder  $y = 1$ , oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6,  
also  $x = 6 \dots 5 \dots 4 \dots 3 \dots 2 \dots 1$

Man pflegt aber auch noch diejenigen Werthe einer jeden unbekannten Zahl mit anzuführen, bei welchen eine von den übrigen unbekannten Zahlen schon 0 wird, und nent diese beiden Werthe als die Gränzen dieser Zahl, zwischen welchen alle Werthe fallen müssen, bei welchem die ganze Aufgabe möglich bleibt. In unsrer Aufgabe ist für  $y$  die höhere Gränze 7 die niedere selbst 0, und  $x$  hat in dieser sehr einfachen Aufgaben dieselben Gränzen.

§. 473.

### CVII. Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, welche in einander multiplicirt eben so viel geben, als zu einander addirt.

§. 474.

### Auflösung.

Wenn  $x$  und  $y$  diese beiden Zahlen sein sollen; so mus  $x y = x + y$ , folglich auch  $x y - x = y$ , das ist  $(y - 1) x = y$ , folglich auch  $x = \frac{y}{y - 1}$

sein.

$\frac{y}{y-1}$   
Nent

## einiger unbestimmten Aufgaben. 305

Nimmt man z. B.  $y = 6$ , so wird  $x = 1 + \frac{1}{3}$ , und es ist allerdings das Produkt  $6 (1 + \frac{1}{3})$  das ist  $7\frac{1}{3} =$  der Summe  $6 + 1 + \frac{1}{3}$ .

Setzt man  $y = 4$ , so wird  $x = 1\frac{1}{3}$ , und es ist allerdings auch  $4 (1\frac{1}{3}) = 4 + 1\frac{1}{3}$ . Und man mag für  $y$  eine Zahl annehmen, welche man nur wil, so wird man nach dieser Formel auch allemal für  $x$  eine andre Zahl finden, welche mit der ersten das verlangte leistet.

Wenn aber ferner verlangt würde, daß beide Zahlen ganze und positive Zahlen sein sollten; so wäre für  $y$  eine solche ganze Zahl zu setzen, bei welcher auch  $y$  eine ganze Zahl bleibt. Um

nun zu versuchen, ob man nicht irgend eine andere Formel erhalten könne, wodurch sich diejenigen Eigenschaften, welche  $y$  in diesem Falle haben mus, deutlicher ergeben wollen, als es in der schon vorhandenen geschieht; so setzt man  $y = g$  mit dem

Vorbehalte, daß  $g$  irgend eine ganze Zahl bedeuten solle, wie groß oder klein sie auch sein mag. Hiernach mus A)  $y = g y - g$ , und ferner  $1 = g - \frac{g}{y}$  sein.

Nun kan aber  $\frac{g}{y}$  von  $g$  abgezogen nur alsdann eine ganze Einheit übrig lassen, wenn auch  $\frac{g}{y}$  irgend einer ganzen

## 306 Achtzehntes Kap. Auflösung

ganzen Zahl  $i$  gleich ist. Man setzt deshalb ferner  $\underline{g} = i$ , nach welcher Voraussetzung auch  $\underline{g} = i \underline{y}$  sein muß. Da nun nach der Gleichung bei A)  $\underline{y} = g \underline{y} - g$  sein sol; so muß auch  $\underline{y} = i \underline{y} \underline{y} - i \underline{y}$ , also  $\underline{1} = i \underline{y} - i$ , das ist,  $\underline{1} = \underline{y} - i$  sein; also

da  $\underline{y} - i$  als die Differenz zwischen einer ganzen Zahl  $\underline{y}$  und  $i$  nothwendig eine ganze Zahl ist, auch  $i$  eine ganze Zahl sein. Und da dies nur in dem

einzigsten Falle sein kan, wenn  $i = 1$  genommen wird; so wissen wir nunmehr, daß  $i$  keine andere Zahl außer 1 sein kan, folglich  $\underline{y} - i = \underline{1}$ , d. i.  $\underline{y} - i = 1$ , also  $\underline{y} = 2$  sein muß. Folglich wird auch  $\underline{x} = \underline{y} = \underline{2} = 2$ , und wir sind auf diese Weise

überzeugt, daß die beiden ganzen Zahlen, 2 und 2, die einzigen ganzen Zahlen sind, welche die Forderungen unsrer Aufgabe erfüllen.

§. 475.

### CVIII. Aufgabe.

Ein Münzmeister hat 14löthiges, 10löthiges und 9löthiges Silber, und wil daraus 30 Mark 12löthiges Silber zusammenmischen, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen, wenn er nur ganze Marke nehmen wil.

§. 476.



## einiger unbestimmten Aufgaben. 307

§. 476.

### Auflösung.

Wenn er von dem 14löthigen  $v$  Mark, von dem 10löthigen  $z$  Mark und von dem 9löthigen  $n$  Mark zusammenmischt, so enthält diese Mischung  $14v + 10z + 9n$  Loth Silber. Da nun 30 Mark 12löthiges Silber 360 Loth Silber enthalten; so soll  $14v + 10z + 9n = 360$ , und da  $v + z + n = 30$ , folglich  $n = 30 - v - z$  ist, auch  $14v + 10z + 270 - 9v - 9z = 360$ , also  $5v + z = 90$ ,  $v = 18 - z$  sein.

Damit  $v$  eine ganze Zahl werde, mus nothwendig auch  $z$  eine ganze Zahl geben, folglich für

$z$  entweder 5 oder 15, 20, 25, 30 u. oder irgend eine von denen unendlich vielen Zahlen genommen werden, welche durch 5 ohne Rest dividirt werden.

Damit aber  $v$  nicht negativ werde, so darf  $z$  nicht größer als 18, folglich  $z$  nicht größer als 90 genommen werden.

Bedenken wir aber ferner, daß  $v + z + n = 30$  sein sol, folglich  $n$  schon 0 wird, sobald  $v + z = 30$ , das ist,  $18 - z + z = 30$ , das ist,  $4z = 12$ , also  $z = 15$  wird; so sehen wir,

daß wir die höhere Grenze für  $z$  bis auf 15 heruntersetzen müssen, und für  $z$  nur diejenigen durch 5 theilbaren Zahlen annehmen können, welche zwischen 0 und 15 fallen.

## 308 Achtzehntes Kap: Auflösung.

Für  $z = 0$ , wird  $v = 18$ ,  $n = 12$ ,

für  $z = 5$ , wird  $v = 17$ ,  $n = 8$ ,

für  $z = 10$ , wird  $v = 16$ ,  $n = 4$ ,

für  $z = 15$ , wird  $v = 15$ ,  $n = 0$ .

Worunter nur die beiden mitlern die zwei wahren Auflösungen angeben.

### §. 477.

Wenn in der vorigen Aufgabe weiter nichts verändert würde, als nur dis, daß man stat  $z$  Mark zehnlöthigen Silbers,  $e$  Mark eilflöthigen Silbers zur Vermischung nehmen sollte: so würde man folgende Gleichung erhalten,  $14v + 11e + 9n = 360$ , und da alsdenn  $n = 30 - v - e$  wird, auch erhalten  $14v + 11e + 270 - 9v - 9e = 360$ , das ist,  $5v + 2e = 90$ . Wolten wir nun hier zuerst die Gränzen für  $v$  bestimmen; so würden wir aus dieser Gleichung folgende schließen:

$$e = 45 - \frac{5v}{2}$$

Damit  $e$  eine ganze Zahl werde, mus also auch  $\frac{5 \cdot v}{2}$  eine ganze Zahl geben, welches nur

alsdann geschiehet, wenn für  $v$  eine durch 2 theilbare, das ist, eine gerade Zahl angenommen wird. Man setze daher  $u = 2t$ , so hat man  $e = 45 - 5t$ . Was für eine ganze Zahl man nun auch für  $t$  annimt, so kan man allemal versichert sein, daß alle drei Zahlen  $v$ ,  $e$ ,  $n$ , ganze Zahlen werden müssen.

Denn

## einfacher unbestimmten Aufgaben. 309

Denn  $v$  ist  $\equiv 2t$ , das Duplum einer ganzen Zahl,  
Da aber  $\frac{5v}{2}$  oder  $\frac{5 \cdot 2t}{2} = 5t \equiv$  einer ganzen Zahl

ist; so wird auch  $e \equiv 45 - \frac{1}{2}v$ , als die Differenz  
zwischen zweien ganzen Zahlen, und endlich auch  $n \equiv$   
 $30 - e - v$ , als die Differenz zwischen 30 und den  
ganzen Zahlen  $v + e$ , eine ganze Zahl werden.

Wir haben nunmehr noch diejenigen Werthe  
für  $t$  auszuschließen, bei welchen eine von diesen  
drei Zahlen negativ werden könnte.

Für  $v$  ist diese Sache leicht entschieden: denn  
da  $v \equiv 2t$ , so mus  $v$  positiv werden, wenn nur  $t$   
positiv genommen wird.

$e$  aber wird, da  $e \equiv 45 - 5t$  weniger als  
0 oder negativ, sobald  $5t > 45$ , und gerade  $\equiv 0$ ,  
wenn  $45 \equiv 5t$ , also  $t \equiv 9$  genommen wird; da-  
her die Zahl 9 die eine Gränze von  $t$  bestimmt.

Da endlich  $n \equiv 30 - v - e$ , das ist,  $n \equiv$   
 $30 - 2t - 45 + 5t$ , das ist,  $n \equiv -15 + 3t$  ist,  
so wird offenbar  $n$  negativ, sobald  $3t < 15$ , also  
 $t < 5$ , und gerade  $n \equiv 0$ , wenn  $t \equiv 5$  genommen  
wird. Also ist 5 die andere Gränze, und zwar die  
niedere Gränze für  $t$ , weil man  $t$  nicht kleiner als  
5, die vorige Gränze 9 aber, die höhere Gränze  
für  $t$ , weil man  $t$  nicht grösser als 9 nehmen darf,  
damit keine Zahl negativ werde. Hiernach ergeben  
sich folgende Auflösungen:

U 3

Für

## 310 Achtzehntes Kap. Auflösung.

$$\begin{array}{l} \text{Für } t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \\ \text{wird } 2t = v = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 10 & 12 & 14 & 16 & 18 \\ \hline \end{array} \\ \text{und } 48 - 5t = e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 15 & 10 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \text{und } -5 + 3t = n = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

wovon die beiden äußern, in welchen eine Zahl 0 wird, abgerechnet, noch 3 wahre Auflösungen übrig bleiben.

§. 478.

### CIX. Aufgabe.

Auf einem Markte, wo Kälber, Schafe und Gänse sind, ein Kalb 3 Rthlr. ein Schaf 2 Rthlr. und eine Gans 1 Rthlr. kostet, sol jemand 30 Stück Vieh für 50 Rthlr. einkaufen; wie viel mus er von jeder Art nehmen.

§. 479.

### Auflösung.

k Kälber kosten  $3k$  Rthlr. s Schafe kosten  $2s$  Rthlr. und g Gänse  $1g$  Rthlr. folglich müssen k, s und g dergestalt genommen werden, daß

$$\text{I) } k + s + g = 30, \text{ II) } 3k + 2s + g = 50 \text{ wird.}$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $g = 30 - k - s$ , und dieser Werth von g in die zweite Gleichung geschrieben giebt  $3k + 2s + 30 - k - s = 50$ ,

$$\text{das ist, } 2k + s = 20,$$

$$\text{daher } s = 20 - 2k.$$

Gobald

## einiger unbestimmten Aufgaben. 311

Sobald für  $k$  eine ganze Zahl angenommen wird, so wird offenbar auch für  $s$  eine ganze Zahl, und auch für  $g$  eine ganze Zahl übrig bleiben.

Damit aber  $s$  nicht negativ werde, so darf  $k$  nicht größer als 10 genommen werden. Da  $g = 30 - s - k$ , das ist,  $g = 30 - 20 + 2k - k$ , das ist,  $g = 10 + k$  ist; so ist gar nicht zu besorgen, daß  $g$  bei irgend einem positiven Werthe von  $k$  negativ werden mögte. Nun wird

für  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$s = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$

und  $g = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

worunter 9 wahre Auflösungen dieser Aufgabe angegeben werden.



## Neunzehntes Kapitel.

### Allgemeine Anmerkungen über die Buchstabenrechnung.

§. 479.

**S**echs und 2 zusammen addirt geben eine neue Zahl 8, welche die Summe der beiden Zahlen 6 und 2 ist, und auf diese Weise erhält man bei der arithmetischen Addition allemal eine neue Zahl, in welcher die zu addirenden Zahlen mit einander vereinigt enthalten sind. Vergleichen wir hiermit die algebraische Addition, wo z. B.  $a + b$  die Summe von  $a$  und  $b$  genant wird; so sehen wir, daß die algebraische Addition eigentlich nur in der Anzeige der vorzunehmenden arithmetischen Addition besteht, welche man nicht eher wirklich unternehmen kan, als bis der Werth der zu addirenden Größen in bestimmten Zahlen angegeben ist. Eben so wird  $a - b$  die Differenz zwischen  $a$  und  $b$ , oder  $a + c$  die Differenz zwischen  $a$  und  $-c$  genant, obgleich durch diese Ausdrücke nur die arithmetischen Operationen angezeigt werden, wodurch man diese Differenzen finden kan, sobald den Größen  $a, b, c$ , ein bestimmter Werth beygelegt ist.

+ 11

§. 480.

§. 480.

Auf ähnliche Weise ist festgesetzt, daß durch den Ausdruck  $p \cdot q$ , oder  $p \times q$ , oder blos durch das Nebeneinanderschreiben zweier Zahlen, durch  $p q$  die vorzunehmende Multiplikation dieser beiden Zahlen, durch den Ausdruck  $\frac{m}{n}$  oder  $m:n$  aber die

vorzunehmende Division der  $m$  durch die  $n$  angezeigt werden solle. Da sich nicht jede bestimmte Zahl durch eine jede andere bestimmte Zahl wirklich dividiren läßt; z. B. 2 nicht durch 5, 3 nicht durch 4 dividiren läßt; so mus man es auch bei der arithmetischen Division sehr ofte nur bei einer ähnlichen Anzeige der vorzunehmenden Division bewenden lassen, wodurch die Form der Brüche,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{4}$  entsteht.

Wie man nun schon in der gemeinen Arithmetik sagt, daß  $\frac{2}{3}$  der Quotient aus 2 durch 3 dividirt sei; so kan man auch mit eben dem Rechte in der Algebra sagen, daß  $\frac{m}{n}$  der Quotient aus  $m$  durch  $n$ ,  $p q$  das Produkt aus  $p$  und  $q$  sei.

§. 481.

Eben dasselbe gilt von den übrigen Zahlenveränderungen, wodurch eine Zahl zur 2ten, 3ten, 4ten, x. Potenz erhoben, oder umgekehrt, die 2te, 3te, 4te Wurzel aus einer Zahl gezogen wird.  $a^2$  heißt die Quadratzahl, oder zweite Potenz von  $a$ ,

u 5

in

## 314 Neunzehntes Kap. Allgemeine

in so fern  $a^2$  anzeigt, daß die Zahl  $a$  durch sich selbst zu multipliciren sei, und  $\sqrt[n]{n}$  heist die zweite Wurzel von  $n$ , in so fern dieser Ausdruck anzeigt, daß man eine Zahl finden solle, welche durch sich selbst multiplicirt  $n$  giebt. Beides kan nicht eher wirklich geschehen oder versucht werden, als bis  $a$  und  $n$  in bestimmten Zahlen angegeben sind.

### §. 482.

Nach dem eben gesagten wird nun allerdings allemal  $a + b$  oder  $a - b$ , die Summe oder Differenz,  $ab$  das Produkt, und  $\frac{a}{b}$  der Quotient bei-

der Zahlen  $a$  und  $b$  sein, was für Zahlen auch  $a$  und  $b$  bedeuten mögen. Auf diese Weise kan man in der Algebra durch allgemeine Zahlen rechnen.

### §. 483.

Diese algebraische Rechnungsart, wonach die vorzunehmenden Zahlenveränderungen nur angezeigt, nicht aber durch wirklich unternommenen Veränderungen neue Zahlen erzeugt, und die zuerst gegebenen aus den Augen gelassen werden, verschafft uns den ungemeinen Vortheil, daß wir die Verbindung, worin mehrere Größen mit einander stehen, und die Entstehungsart der einen Grösse aus den andern allemal deutlich übersehen können. So zeigt z. B. die in der XIV. Aufgabe gefundene Formel



$x = \frac{d + b}{a - c}$  sehr deutlich, daß die gesuchte Zahl

der Personen allemal gefunden wird, indem man die Zahl der Groschen, um welche man bei einer Vertheilung zu wenig hat, zu derjenigen Zahl von Groschen, welche nach der andern Vertheilung übrig bleiben, addirt, und diese Summe durch den Ueberschuß dividirt, welcher angiebt, um wie viel man bey der ersten Vertheilung mehr geben wollte, als bei der zweiten. Nach der vorhergehenden Auflösung dieser Aufgabe in bestimmten Zahlen (§. 45.) wird freilich auch die Anzahl der Personen  $x = 7$  richtig gefunden; es bleibt aber sehr ungewis, durch welche Veränderung die Zahl 7 aus denen dort gegebenen Zahlen 12, 6, 4, 2 entstanden ist. Denn nicht nur  $12 + 2$  giebt 7,

sondern es würde auch  $\frac{12 + 6 - 4}{2} = 7$ , auch

auch  $\frac{12 + 6}{4 + 2} + 4 = 7$  sein; und man könnte noch

viel mehrere Verbindungen entdecken, wodurch aus diesen gegebenen Zahlen 12, 6, 4, 2, die Zahl 7 hervorgebracht würde; da gleichwohl nur die erste die richtige ist, nach welcher die Zahl der Personen allemal gefunden wird, wenn auch die Zahlen derer in dieser Aufgabe vorkommenden Grössen nicht gerade dieselben 12, 6, 4, 2 sind.

## 316 Neunzehntes Kap. Allgemeine

### §. 484.

In einer jeden Aufgabe sind Bedingungen und Forderungen enthalten, welche sowohl die Beschaffenheit der bekanten und unbekanten Zahlen betreffen, ob z. B. diese Zahlen positiv oder negativ, rational oder irrational sein sollen, als auch die Gröſſen gewisser unbekanten Zahlen durch angegebne Vergleichung mit andern bekanten Zahlen bestimmen.

Alle Bedingungen einer Aufgabe durch algebraische Zeichen ausgedrückt, geben eine oder mehrere Grundgleichungen; je nachdem die Aufgabe weniger oder mehrere Bedingungen enthält. In solchen Gleichungen mus also eine jede in der Aufgabe vorkommende sowohl bekante als unbekante Gröſſe durch ein gewisses Zeichen sinlich dargestellt werden, und man gebraucht für die bekanten und gegebenen Gröſſen gewöhnlich die ersten, für die unbekanten Gröſſen, die lezten Buchstaben des lateinischen Alphabetes. Giebt nun eine Aufgabe nur eine Grundgleichung A, in welcher alle Bedingungen derselben durch die bekanten und durch Eine unbekante Zahl  $x$  konten dargestellt werden; so können aus dieser Gleichung durch verschiedene Veränderungen nach und nach mehrere Gleichungen B, C, D, E, F, G, H, hergeleitet werden, dergestalt, daß in der lezten H auf der einen Seite nur die eine unbekante  $x$  ist, welche durch die bloß bekanten Zahlen der andern Seite völlig bestimmt wird.

Hiebei

## Anmerk. über die Buchstabenr. 317

Hierbei wird allemal aus der Gleichung A die B, aus der B die C . . . . aus der G die H auf solche Weise geschlossen, daß wenn bei irgend einem Werthe von  $x$  die letzte H besteht, bei demselben Werthe der  $x$  rückwärts auch die G . . . . auch die C, B bestehen muß; und wenn diese B richtig ist, auch die Grundgleichung A, also auch alle in derselben ausgedrückten Bedingungen der Aufgabe bei diesem Werthe der  $x$  mit einander bestehen können.

### §. 485.

Wenn sich die Bedingungen einer Aufgabe auf zwei unbekannte Zahlen,  $x$ ,  $y$  beziehen, aber auch zwei Grundgleichungen  $A$  und  $A'$  geben, oder sich auf drei unbekannte Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  beziehen, aber auch drei Grundgleichungen  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  geben; so kan aus diesen Grundgleichungen doch eine Gleichung  $A$ , in welcher nur eine unbekannte Zahl  $x$  vorkommt, dergestalt gefolgert werden, daß wenn bei irgend einem Werthe von  $x$  diese Gleichung  $A$  bestehen kan, auch die drei Gleichungen  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  bestehen können, nachdem die darin vorkommenden unbekannten Zahlen  $y$  und  $z$  durch eben den Werth von  $x$  und durch bekante Zahlen bestimmt werden.

### §. 486.

Eine Aufgabe darf nicht so viel Bedingungen enthalten, daß sich daraus mehrere Gleichungen ergeben, als unbekannte Zahlen vorkommen.  
Denn

## 318 Neunzehntes Kap. Allgemeine

Denn da z. B. zwei unbekannte Zahlen  $x, y$ , durch zwei Gleichungen schon völlig bestimmt werden; so kan weder  $x$  noch  $y$  den Forderungen einer dritten Gleichung aufs neue unterworfen werden: sondern wenn eine Aufgabe auch nur eine Gleichung mehr giebt, als sie unbekannte Zahlen voraussetzt; so müssen entweder die Forderungen der einen Gleichung völlig dieselben Zahlen bestimmen, welche eine oder mehrere von den übrigen Gleichungen zusammengenommen schon bestimmen; in dem Falle folgt schon die eine Gleichung aus einer oder mehreren von den übrigen, und die eine Gleichung ist völlig überflüssig: oder die Aufgabe mus unmöglich werden. (\*)

§. 487.

(\*) A. D. Suche zwei Zahlen  $x, y$ , wovon die eine um 2 größer ist als die andere, deren Summe 6 und Produkt 8 ist. Diese Bedingungen geben folgende drei Gleichungen:

$$\text{I) } x + 2 = y, \text{ II) } x + y = 6, \text{ III) } xy = 8.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen wird durch die gewöhnliche Auflösung gefunden, daß  $x$  keine andere Zahl als 2, und  $y$  keine andere Zahl als 4 sein kann. Die Werte dieser beiden Zahlen sind auf diese Weise bloß aus den ersten beiden Gleichungen bestimmt, ohne daß man auf die dritte Gleichung die geringste Rücksicht genommen hat. Wird demnachgesehen, wie es hier der Fall ist, auch die Forderung der dritten Gleichung durch diese beiden Zahlen erfüllt; so geschieht

§. 487.

Wenn eine Aufgabe aber weniger Gleichungen giebt, als sie unbekante Zahlen enthält; so können sie unbestimmt bleiben und mehrere Auflösungen zulassen. Man sehe das 18te Kapitel.

§. 488.

Eine Aufgabe muß auch alsdann unbestimmt bleiben, wenn ihre Bedingungen zwar eben so viele Gleichungen darbieten, als unbekante Zahlen vorkommen; aber zwei von diesen Gleichungen völlig einerlei Zahlen bestimmen, also die eine Gleichung aus der andern folgt. Z. B. Wenn die Bedingungen der LXXXVII. Aufgabe folgendermaßen gegeben wären: 1.) das Wasser, welches aus der ersten Röhre in 4 Stunden läuft

schleicht es nur, weil diese dritte Gleichung schon aus den beyden ersten von selbst folgt. Würde hingegen verlangt, daß  $xy = 10$  sein sollte; so wäre diese Aufgabe unmöglich.

Suchet 2 Zahlen  $x$ ,  $y$ , deren Summe, Produkt und Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Diese Bedingungen geben drei Gleichungen:

$$\text{I) } x + y = xy, \quad \text{II) } x + y = x^2 - y^2 \\ \text{III) } xy = x^2 - y^2.$$

Aber wer sieht nicht sogleich, daß eine jede dieser Gleichungen nach einem bekannten Grundsatz schon aus den beiden übrigen folgt und man daher bei der Auflösung dieser Aufgabe nur auf 2 von diesen Gleichungen zu sehen hat.

## 320 Neunzehntes Kap. Allgemeine

läuft, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 6 Stunden läuft, beträgt 26 Maß: 2) was aus der ersten Röhre in 2 Stunden fließt, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 3 Stunden fließt, beträgt 13 Maß, das ist, I)  $4x + 6y = 26$ , II)  $2x + 3y = 13$ ; so folgt die zweite Gleichung schon aus der ersten. Ueberläßt man sich nun ohne weiteres Bedenken den mechanischen Auflösungen dieser beiden Gleichungen; so erhält man aus I)  $x = \frac{26 - 6y}{4}$ , aus II)  $x = \frac{13 - 3y}{2}$ , da-

$$\text{her } \frac{26 - 6y}{4} = \frac{13 - 3y}{2}, \text{ d. i. } \frac{13 - 3y}{2} = \frac{13 - 3y}{2}$$

daher  $13 - 3y = 13 - 3y$ ; und so kommt man endlich auf das Resultat, worauf Anfänger, welche die Aufgaben noch nicht gehörig übersehen, oder auch geübtere bei zu verwickelten Aufgaben, nur zu erste treffen, daß  $y = y$  sei. Eine solche identische Gleichung zeigt an, daß durch die Bedingungen der Aufgabe keine andere Beschaffenheit für  $y$  bestimmt wird, als daß  $y$  sich selbst gleich sein müsse. Folglich wird eine jede beliebige für  $y$  angenommene Zahl alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn diese  $y$  die einzige darin vorkommende unbekannte Zahl ist, wie z. B. in der XXXII. Aufgabe. Eine solche Aufgabe kan daher mit Recht zu den unbestimmten Aufgaben gerechnet werden. Und wenn außer der  $y$  noch mehrere unbekannte Zahlen in der Aufgabe vorkommen, so

## Anmerk. über die Buchstabenr. 321

so müssen ihre Werthe aus dem für  $y$  angenommenen Werthe bestimmt werden, wie es bey den Auflösungen der unbestimmten Aufgaben gezeigt ist.

### §. 489.

Unmöglich wird eine Aufgabe, wenn irgend eine Bedingung derselben mit einer oder mehreren von den übrigen Bedingungen nicht zugleich bestehen kan. Da nun die durch algebraische Auflösung aus der Grundgleichung entwickelte Formel überhaupt die Verbindungen der in der Aufgabe vorkommenden Zahlen untereinander auf das deutlichste vor Augen stellt; so lassen sich aus dieser Formel auch viel leichter als aus den zuweilen sehr verwickelten Bedingungen der Aufgabe selbst, die Ursachen von der Unmöglichkeit einer Aufgabe, und also auch die Grenzen entdecken, wo diese Ursachen wegfallen und die Aufgabe möglich wird.

### §. 490.

Sehr oft geschieht es, daß sich für eine oder die andere unbefante Zahl ein negativer Werth ergibt, ob gleich in der Aufgabe selbst keine solche entgegengesetzte Beziehungen angegeben werden, wonach von denen darin vorkommenden Größen, die eine positiv und die andere negativ werden könnte. Eine solche Aufgabe bleibt demnach auch so lange unmöglich, bis man die Bedingungen so allgemein ausdrückt, daß sie solche entgegengesetzte Beziehungen mit in sich fassen. Z. B. Ich habe  
E nur

## 322. Neunzehntes Kap. Allgemeine

nur Vier- und Zweigroschenstücke, und mein Freund F will von mir 6 Stük Geld haben, welche 2 Rthlr. werth sind; wie viel mus ich ihm von jeder Sorte geben?

Diese Aufgabe scheint beim ersten Anblicke etwas ganz Unmögliches zu verlangen. Denn wenn ich auch meinem Freunde nichts als Viergroschenstücke geben wolte; so würde er doch in 6 Viergroschenstücken nur den Werth von Einem Rthlr. erhalten. Es können auch diese Forderungen, so wie sie in der Aufgabe ausgedrückt sind, schlechterdings nicht erfüllt werden; vielleicht aber wird uns der, durch algebraische Auflösung entwikkelte Werth der gesuchten Zahlen, ein Verfahren an die Hand geben, wodurch das Verlangen meines Freundes gewissermaßen erfüllt werden könnte.

Es sei  $x$  die Zahl der nöthigen Viergroschenstücke; so giebt  $6 - x$  die zu gebrauchenden Zweigroschenstücke an, und es mus  $x$  dergestalt genommen werden, daß

$$\begin{aligned} 4x \text{ gr.} + 2(6 - x) \text{ gr.} &= 48 \text{ gr. wird,} \\ \text{folglich überhaupt } 4x + 12 - 2x &= 48 \\ \text{daher } 2x &= 36 \\ \text{und } x &= 18 \text{ sein,} \end{aligned}$$

daher ferner  $6 - x$ , das ist,  $6 - 18$ , das ist,  $-12$  die erforderliche Zahl der Zweigroschenstücke angiebt.

So bald nun von den beiden Zahlen 18 und  $-12$  oder, welches einerlei ist,  $+18$  und  $-12$ , die

$+18$



## Anmerk. über die Buchstabenr. 323

+ 18 anzeigt, daß ich 18 gr. an meinen Freund geben solle; so mus hingegen die — 12 andeuten, daß ich 12 gr. von meinem Freunde empfangen solle. Und wenn wir uns diesernach vorstellen, daß F in 12 Zweigroschenstücken den Werth von Einem Rthlr. an mich zurückgiebt, nachdem er von mir in 18 Bier Groschenstücken den Werth von 3 Rthlr. empfangen hat; so ist auf diese Weise gewissermaßen der Wunsch des F erfüllt. Denn F hat nach einem solchem Tausche 6 Stük Geld mehr, und am Werthe 2 Rthlr. mehr, als er vor diesem Tausche hatte.

Dies kan uns veranlassen, diese Aufgabe so gleich weit allgemeiner folgendermaßen auszudrücken. Ich und mein Freund F sind mit einer hinlänglichen Anzahl von Bier- und Zweigroschenstücken versehen, wie müssen wir verfahren, damit F um 6 Stük Geld mehr und zugleich am Werthe 2 Rthlr. mehr erhalte, als er jetzt hat?

### §. 491.

Sobald man annimt, daß das Produkt aus zweien positiven Zahlen positiv sein müsse; so ergeben sich nach den §. 241. ausgeführten Schlüssen die übrigen bekanten Lehrsätze, nach welchen auch das Produkt aus zweien negativen Zahlen positiv, hingegen das Produkt aus zweien Zahlen von ungleichen Zeichen negativ sein mus. Und hieraus werden ferner nach §. 242. 244. die ähnlichen Lehrsätze

## 314 Neunzehntes Kap. Allgemeine

in so fern  $a^2$  anzeigt, daß die Zahl  $a$  durch sich selbst zu multipliciren sei, und  $\sqrt[n]{n}$  heißt die zweite Wurzel von  $n$ , in so fern dieser Ausdruck anzeigt, daß man eine Zahl finden solle, welche durch sich selbst multiplicirt  $n$  giebt. Beides kan nicht eher wirklich geschehen oder versucht werden, als bis  $a$  und  $n$  in bestimmten Zahlen angegeben sind.

### §. 482.

Nach dem eben gesagten wird nun allerdings allemal  $a + b$  oder  $a - b$ , die Summe oder Differenz,  $ab$  das Produkt, und  $\frac{a}{b}$  der Quotient bei-

der Zahlen  $a$  und  $b$  sein, was für Zahlen auch  $a$  und  $b$  bedeuten mögen. Auf diese Weise kan man in der Algebra durch allgemeine Zahlen rechnen.

### §. 483.

Diese algebraische Rechnungsart, wonach die vorzunehmenden Zahlenveränderungen nur angezeigt, nicht aber durch wirklich unternommene Veränderungen neue Zahlen erzeugt, und die zuerst gegebenen aus den Augen gelassen werden, verschafft uns den ungemeinen Vortheil, daß wir die Verbindung, worin mehrere Größen mit einander stehen, und die Entstehungsart der einen GröÙe aus den andern allemal deutlich übersehen können. So zeige z. B. die in der XIV. Aufgabe gefundene Formel

$x = \frac{d + b}{a - c}$  sehr deutlich, daß die gesuchte Zahl

der Personen allemal gefunden wird, indem man die Zahl der Groschen, um welche man bei einer Vertheilung zu wenig hat, zu derjenigen Zahl von Groschen, welche nach der andern Vertheilung übrig bleiben, addirt, und diese Summe durch den Ueberschuß dividirt, welcher angiebt, um wie viel man bey der ersten Vertheilung mehr geben wollte, als bei der zweiten. Nach der vorhergehenden Auflösung dieser Aufgabe in bestimmten Zahlen (§. 45.) wird freilich auch die Anzahl der Personen  $x = 7$  richtig gefunden; es bleibt aber sehr ungewis, durch welche Veränderung die Zahl 7 aus denen dort gegebenen Zahlen 12, 6, 4, 2 entstanden ist. Denn nicht nur  $12 + 2$  giebt 7,

sondern es würde auch  $\frac{12 + 6 - 4}{2} = 7$ , auch

auch  $\frac{12 + 6}{4 + 2} + 4 = 7$  sein; und man könnte noch

viele mehrere Verbindungen entdecken, wodurch aus diesen gegebenen Zahlen 12, 6, 4, 2, die Zahl 7 hervorgebracht würde; da gleichwohl nur die erste die richtige ist, nach welcher die Zahl der Personen allemal gefunden wird, wenn auch die Zahlen derer in dieser Aufgabe vorkommenden Grössen nicht gerade dieselben 12, 6, 4, 2 sind,

## 316 Neunzehntes Kap. Allgemeine

### §. 484.

In einer jeden Aufgabe sind Bedingungen und Forderungen enthalten, welche sowohl die Beschaffenheit der bekanten und unbekanten Zahlen betreffen, ob z. B. diese Zahlen positiv oder negativ, rational oder irrational sein sollen, als auch die Grössen gewisser unbekanten Zahlen durch angegebne Vergleichung mit andern bekanten Zahlen bestimmen.

Alle Bedingungen einer Aufgabe durch algebraische Zeichen ausgedrückt, geben eine oder mehrere Grundgleichungen, je nachdem die Aufgabe weniger oder mehrere Bedingungen enthält. In solchen Gleichungen mus also eine jede in der Aufgabe vorkommende sowohl bekante als unbekante Grösse durch ein gewisses Zeichen sinlich dargestellt werden, und man gebraucht für die bekanten und gegebenen Grössen gewöhnlich die ersten, für die unbekanten Grössen, die letzten Buchstaben des lateinischen Alphabetes. Giebt nun eine Aufgabe nur eine Grundgleichung A, in welcher alle Bedingungen derselben durch die bekanten und durch eine unbekante Zahl  $x$  konten dargestellt werden; so können aus dieser Gleichung durch verschiedene Veränderungen nach und nach mehrere Gleichungen B, C, D, E, F, G, H, hergeleitet werden, dergestalt, daß in der letzten H auf der einen Seite nur die eine unbekante  $x$  ist, welche durch die blos bekanten Zahlen der andern Seite völlig bestimmt wird.

Hiebei

Hierbei wird allemal aus der Gleichung A die B, aus der B die C . . . . aus der G die H auf solche Weise geschlossen, daß wenn bei irgend einem Werthe von  $x$  die letzte H besteht, bei demselben Werthe der  $x$  rückwärts auch die G . . . . auch die C, B bestehen muß; und wenn diese B richtig ist, auch die Grundgleichung A, also auch alle in derselben ausgedrückten Bedingungen der Aufgabe bei diesem Werthe der  $x$  mit einander bestehen können.

**§. 485.**

Wenn sich die Bedingungen einer Aufgabe auf zwei unbekannte Zahlen,  $x$ ,  $y$  beziehen, aber auch zwei Grundgleichungen A und A' geben, oder sich auf drei unbekannte Zahlen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  beziehen, aber auch drei Grundgleichungen A, A', A'' geben; so kan aus diesen Grundgleichungen doch eine Gleichung A, in welcher nur eine unbekannte Zahl  $x$  vorkommt, dergestalt gefolgert werden, daß wenn bei irgend einem Werthe von  $x$  diese Gleichung A bestehen kan, auch die drei Gleichungen A, A', A'' bestehen können, nachdem die darin vorkommenden unbekannten Zahlen  $y$  und  $z$  durch eben den Werth von  $x$  und durch bekante Zahlen bestimmt werden.

**§. 486.**

Eine Aufgabe darf nicht so viel Bedingungen enthalten, daß sich daraus mehrere Gleichungen ergeben, als unbekannte Zahlen vorkommen.  
Denn

### 318 Neunzehntes Kap. Allgemeine

Denn da z. B. zwei unbekannte Zahlen  $x$ ,  $y$ , durch zwei Gleichungen schon völlig bestimmt werden; so kan weder  $x$  noch  $y$  den Forderungen einer dritten Gleichung aufs neue unterworfen werden: sondern wenn eine Aufgabe auch nur eine Gleichung mehr giebt, als sie unbekannte Zahlen voraussetzt; so müssen entweder die Forderungen der einen Gleichung völlig dieselben Zahlen bestimmen, welche eine oder mehrere von den übrigen Gleichungen zusammengenommen schon bestimmen; in dem Falle folgt schon die eine Gleichung aus einer oder mehreren von den übrigen, und die eine Gleichung ist völlig überflüssig: oder die Aufgabe mus unmöglich werden. (\*)

§. 487.

(\*) Z. B. Suche zwei Zahlen  $x$ ,  $y$ , wovon die eine um 2 größer ist als die andere, deren Summe 6 und Produkt 8 ist. Diese Bedingungen geben folgende drey Gleichungen:

$$\text{I) } x+2=y, \text{ II) } x+y=6, \text{ III) } xy=8.$$

Aus den ersten beyden Gleichungen wird durch die gewöhnliche Auflösung gefunden, daß  $x$  keine andere Zahl als 2, und  $y$  keine andere Zahl als 4 sein kann. Die Werthe dieser beyden Zahlen sind auf diese Weise blos aus den ersten beiden Gleichungen bestimmt, ohne daß man auf die dritte Gleichung die geringste Rücksicht genommen hat. Wird demohnerachtet, wie es hier der Fall ist, auch die Forderung der dritten Gleichung durch diese beiden Zahlen erfüllt; so geschieht

## §. 487.

Wenn eine Aufgabe aber weniger Gleichungen giebt, als sie unbekante Zahlen enthält; so kan sie unbestimt bleiben und mehrere Auflösungen zulassen. Man sehe das 18te Kapitel.

## §. 488.

Eine Aufgabe mus auch alsdann unbestimt bleiben, wenn ihre Bedingungen zwar eben so viele Gleichungen darbieten, als unbekante Zahlen vorkommen; aber zwei von diesen Gleichungen völlig einerlei Zahlen bestimmen, also die eine Gleichung aus der andern folget. Z. B. Wenn die Bedingungen der LXXXVII. Aufgabe folgendermaßen gegeben wären: 1) das Wasser, welches aus der ersten Röhre in 4 Stunden läuft

schleht es nur, weil diese dritte Gleichung schon aus den beyden ersten von selbst folgt. Würde hingegen verlangt, daß  $xy = 10$  sein sollte; so wäre diese Aufgabe unmöglich.

Suchet 2 Zahlen  $x, y$ , deren Summe, Produkt und Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Diese Bedingungen geben drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad x+y &= xy, & \text{II)} \quad x+y &= x^2 - y^2 \\ \text{III)} \quad xy &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Aber wer sieht nicht sogleich, daß eine jede dieser Gleichungen nach einem bekannten Grundsatz schon aus den beiden übrigen folget und man daher bei der Auflösung dieser Aufgabe nur auf 2 von diesen Gleichungen zu sehen hat.

## 320 Neunzehntes Kap. Allgemeine

läuft, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 6 Stunden läuft, beträgt 26 Maß: 2) was aus der ersten Röhre in 2 Stunden fließt, mit demjenigen, was aus der zweiten Röhre in 3 Stunden fließt, beträgt 13 Maß, das ist, I)  $4x + 6y = 26$ , II)  $2x + 3y = 13$ ; so folgt die zweite Gleichung schon aus der ersten. Ueberläßt man sich nun ohne weiteres Bedenken den mechanischen Auflösungen dieser beiden Gleichungen; so erhält man aus I)  $x = \frac{26 - 6y}{4}$ , aus II)  $x = \frac{13 - 3y}{2}$ , da-

$$\text{her } \frac{26 - 6y}{4} = \frac{13 - 3y}{2}, \text{ d. i. } \frac{13 - 3y}{2} = \frac{13 - 3y}{2}$$

daher  $13 - 3y = 13 - 3y$ ; und so kommt man endlich auf das Resultat, worauf Anfänger, welche die Aufgaben noch nicht gehörig übersehen, oder auch geübtere bei zu verwickelten Aufgaben, nur zu erste treffen, daß  $y = y$  sei. Eine solche identische Gleichung zeigt an, daß durch die Bedingungen der Aufgabe keine andere Beschaffenheit für  $y$  bestimmt wird, als daß  $y$  sich selbst gleich sein müsse. Folglich wird eine jede beliebige für  $y$  angenommene Zahl alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn diese  $y$  die einzige darin vorkommende unbekannte Zahl ist, wie z. B. in der XXXII. Aufgabe. Eine solche Aufgabe kan daher mit Recht zu den unbestimmten Aufgaben gerechnet werden. Und wenn außer der  $y$  noch mehrere unbekannte Zahlen in der Aufgabe vorkommen, so



## Anmerk. über die Buchstabenr. 321

so müssen ihre Werthe aus dem für  $y$  angenommenen Werthe bestimmt werden, wie es bey den Auflösungen der unbestimmten Aufgaben gezeigt ist.

### §. 489.

Unmöglich wird eine Aufgabe, wenn irgend eine Bedingung derselben mit einer oder mehreren von den übrigen Bedingungen nicht zugleich bestehen kan. Da nun die durch algebraische Auflösung aus der Grundgleichung entwickelte Formel überhaupt die Verbindungen der in der Aufgabe vorkommenden Zahlen untereinander auf das deutlichste vor Augen stellt; so lassen sich aus dieser Formel auch viel leichter als aus den zuweilen sehr verwickelten Bedingungen der Aufgabe selbst, die Ursachen von der Unmöglichkeit einer Aufgabe, und also auch die Grenzen entdecken, wo diese Ursachen wegfallen und die Aufgabe möglich wird.

### §. 490.

Sehr oft geschieht es, daß sich für eine oder die andere unbefante Zahl ein negativer Werth ergibt, ob gleich in der Aufgabe selbst keine solche entgegengesetzte Beziehungen angegeben werden, wonach von denen darin vorkommenden Größen, die eine positiv und die andere negativ werden könnte. Eine solche Aufgabe bleibt demnach auch so lange unmöglich, bis man die Bedingungen so allgemein ausdrückt, daß sie solche entgegengesetzte Beziehungen mit in sich fassen. Z. B. Ich habe  
E  
nur

## 322 Neunzehntes Kap. Allgemeine

nur Vier- und Zweigroschenstücke, und mein Freund F wil von mir 6 Stük Geld haben, welche 2 Rthlr. werth sind; wie viel mus ich ihm von jeder Sorte geben?

Diese Aufgabe scheint beim ersten Anblicke etwas ganz Unmögliches zu verlangen. Denn wenn ich auch meinem Freunde nichts als Viergroschenstücke geben wolte; so würde er doch in 6 Viergroschenstücken nur den Werth von Einem Rthlr. erhalten. Es können auch diese Forderungen, so wie sie in der Aufgabe ausgedrückt sind, schlechterdings nicht erfüllt werden; vielleicht aber wird uns der, durch algebraische Auflösung entwickelte Werth der gesuchten Zahlen, ein Verfahren an die Hand geben, wodurch das Verlangen meines Freundes gewissermaßen erfüllt werden könnte.

Es sei  $x$  die Zahl der nöthigen Viergroschenstücke; so giebt  $6 - x$  die zu gebrauchenden Zweigroschenstücke an, und es mus  $x$  dergestalt genommen werden, daß

$$\begin{array}{rcl} 4x \text{ gr.} + 2(6 - x) \text{ gr.} & = & 48 \text{ gr. wird,} \\ \text{folglich überhaupt } 4x + 12 - 2x & = & 48 \\ \text{daher} \quad 2x & = & 36 \\ \text{und} \quad x & = & 18 \text{ sein,} \end{array}$$

daher ferner  $6 - x$ , das ist,  $6 - 18$ , das ist,  $-12$  die erforderliche Zahl der Zweigroschenstücke angiebt.

So bald nun von den beiden Zahlen 18 und  $-12$  oder, welches einerlei ist,  $+18$  und  $-12$ , die

$+18$

## Anmerk. über die Buchstabenr. 323

+ 18 anzeigt, daß ich 18 gr. an meinen Freund geben solle; so muß hingegen die — 12 andeuten, daß ich 12 gr. von meinem Freunde empfangen solle. Und wenn wir uns diesemnach vorstellen, daß F in 12 Zweigroschenstücken den Werth von Einem Rthlr. an mich zurückgibt, nachdem er von mir in 18 Bier Groschenstücken den Werth von 3 Rthlr. empfangen hat; so ist auf diese Weise gewissermaßen der Wunsch des F erfüllt. Denn F hat nach einem solchem Tausche 6 Stük Geld mehr, und am Werthe 2 Rthlr. mehr, als er vor diesem Tausche hatte.

Dies kan uns veranlassen, diese Aufgabe sogleich weit allgemeiner folgendermaßen auszudrücken. Ich und mein Freund F sind mit einer hinlänglichen Anzahl von Vier- und Zweigroschenstücken versehen, wie müssen wir verfahren, damit F um 6 Stük Geld mehr und zugleich am Werthe 2 Rthlr. mehr erhalte, als er jetzt hat?

### §. 491.

Sobald man annimmt, daß das Produkt aus zweien positiven Zahlen positiv sein müsse; so ergeben sich nach den §. 241. ausgeführten Schlüssen die übrigen bekanten Lehrsätze, nach welchen auch das Produkt aus zweien negativen Zahlen positiv, hingegen das Produkt aus zweien Zahlen von ungleichen Zeichen negativ sein muß. Und hieraus werden ferner nach §. 242. 244. die ähnlichen Lehrsätze

## 324 Neunzehntes Kap. Allgemeine

sätze für die Division der positiven und negativen Größen hergeleitet. Ich wil noch einiges zur Erläuterung dieser Lehrsätze sagen, welche den Anfängern mehrentheils sehr sonderbar und auffallend scheinen.

§. 492.

Multipliciren heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, in welcher der eine Faktor ebenso enthalten ist, wie die Einheit in dem andern Faktor, daher man auch sagen kan, multipliciren heiße, die vierte Proportionalzahl zu der Einheit und den beiden Faktoren finden. Wenn aber die beiden Faktoren auch noch die Zeichen + oder — vor sich haben; so müssen bei der Multiplikation dieser Zahlen, außer der absoluten Größe auch noch die Beziehungen in Betrachtung kommen, welche durch diese Zeichen angedeutet werden, und es müssen demnach das Produkt und der eine Faktor einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem der andere Faktor und die Einheit einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben. Ob nun von zweien Faktoren, z. B. + a und — b, der eine Faktor + a mit der Einheit einerlei Zeichen habe, oder nicht, das kan nicht eher beantwortet werden, als bis man festgesetzt hat, ob die Einheit das Zeichen + oder — vor sich habe. Welches von beiden Zeichen man der Einheit beilegen wolle, ist völlig gleichgültig; da die ganze Natur und Kraft der beiden Zeichen + und — darin besteht, daß  $+ 1 - 1 = 0$  ist, folglich ein Zeichen für sich genom-

genommen, von dem andern nur durch Namen und Figur unterschieden ist.

§. 493.

Nimt man diese Einheit positiv an; so ergeben sich die allgemein eingeführten Regeln, nach welchen zwei Faktoren von gleichen Zeichen ein positives, zwei Faktoren von ungleichen Zeichen hingegen ein negatives Produkt geben. Es kan z. B. nach der Voraussetzung, daß die Einheit positiv sei, das Produkt aus  $-3$  und  $-4$  keine andere Zahl als  $+12$  sein. Denn da der eine Faktor  $-3$  nicht die Einheit  $+1$ , sondern das Gegentheil derselben  $-1$  dreimal in sich faßt; so mus auch das Produkt nicht den andern Faktor  $-4$ , sondern dessen Gegentheil  $+4$  dreimal in sich enthalten; dergestalt, daß die positive Einheit, die beiden Faktoren und das Produkt folgende algebraische Proportion geben:

$$+1 : -3 = -4 : +12$$

Auf eben die Weise ergeben sich in den übrigen 3 Fällen folgende Proportionen:

$$+1 : +3 = +4 : +12$$

$$+1 : -3 = +4 : -12$$

$$+1 : +3 = -4 : -12$$

wonach man sagen kan: daß ein algebraisches Produkt die vierte Proportionalzahl zur positiven Einheit und den beiden Faktoren sei.

## 326 Neunzehntes Kap. Allgemeine

§. 494.

Sobald man hingegen der Einheit das andere Zeichen — giebt; so kan z. B. das Produkt aus  $+ 3$  und  $+ 4$  keine andere Zahl als  $- 12$  sein, indem dieses Produkt das Gegentheil des einen Faktors  $+ 4$  eben so dreimal enthalten mus, als der andere Faktor  $+ 3$  das Gegentheil der Einheit  $- 1$  dreimal enthält. Hieraus und aus den übrigen 3 Fällen, wo entweder beide Faktoren negativ, oder der eine positiv, der andere negativ sein können; ergeben sich folgende Proportionen:

$$- 1 : + 3 = + 4 : - 12$$

$$- 1 : - 3 = - 4 : - 12$$

$$- 1 : + 3 = - 4 : + 12$$

$$- 1 : - 3 = + 4 : + 12$$

Man müste nunmehr sagen, daß das algebraische Produkt zweier Zahlen die vierte Proportionalzahl zur negativen Einheit und den beiden Faktoren sei, und erhielte aus diesem Begriffe die Lehrsätze, daß zwei Faktoren von gleichen Zeichen ein negatives, und zwei Faktoren von ungleichen Zeichen ein positives Produkt geben.

§. 495.

Dieselben Lehrsätze können auch auf die in diesem Buche §. 241. gebrauchte Weise erwiesen werden, wenn man von dem Satze ausgehet, daß  $- 3 \times - 4 = - 12$  sein müsse, welcher Satz eben so klar ist, als der dort zum Grunde gelegte, daß  $+ 3 \times + 4 = + 12$  sei. Man könnte diese

Lehr-

Lehrsätze, die mit den erstern gewöhnlichen völlig einerlei sagen, auch eben so gut als jene gebrauchen, und in die ganze Algebra einführen, so, wie man überhaupt versichert sein kan, daß ein jedes algebraische Buch noch eben so richtig bleibt, als es einmal ist; wenn man allenthalben stat — das Zeichen  $+$  und umgekehrt, und allenthalben, stat positiv, negativ, und umgekehrt, drucken liesse. Eben so wenig könnte der Richtigkeit eines algebraischen Buches der geringste Eintrag geschehen, wenn man die beiden Zeichen  $+$  und  $-$  umtauschen, das erste durch negativ, und das andere durch positiv aussprechen, alsdan aber auch  $+$  stat eines jeden  $-$ , und umgekehrt, oder auch bei unveränderten Zeichen allenthalben positiv, stat negativ, und umgekehrt, schreiben wolte. Diese letztern Lehrsätze sind also im Grunde weiter durch nichts von den erstern unterschieden, als daß positiv anders lautet als negativ, und das Zeichen  $+$  anders in die Augen fällt als das Zeichen  $-$ .

## §. 496.

Man würde die Fertigkeit im algebraischen Rechnen auf eine sehr lächerliche Weise erschweren, wenn man den Begriff der algebraischen Multiplikation und die daraus folgenden Lehrsätze in der einen Rechnung durch diese, in einer andern Rechnung durch andere Worte und Zeichen ausdrücken wolte. Ein dunkles Gefühl, welches durch den Namen positiv veranlaßt wird, scheint dafür zu

## 328 Neunzehntes Kap. Allgemeine

entscheiden, daß man der Einheit ein für allemal das Zeichen + beilegen solle, und theils diesem dunkeln Gefühle, theils der weisen Verträglichkeit der Algebristen hat man es zu verdanken, daß man auch hierin für einerlei Begriffe beständig einerlei Worte und Zeichen gebraucht.

### §. 497.

Es wird keine Schwierigkeit haben, alles was hier gesagt ist, auch auf die Division positiver und negativer Größen anzuwenden, wenn man nur bedenkt, daß durch Division diejenige Zahl gefunden wird, welche in dem Dividendus eben so enthalten ist, wie die Einheit im Divisor, folglich der Quotient die vierte Proportionalzahl zum Divisor der positiven Einheit und dem Dividendus selbst ist. Die vier verschiedenen Fälle geben folgende Proportionen:

$$\begin{aligned} + 3 : + 1 &= + 12 : + 4 \\ - 3 : + 1 &= - 12 : + 4 \\ + 3 : + 1 &= - 12 : - 4 \\ - 3 : + 1 &= + 12 : - 4 \end{aligned}$$

### §. 498.

Aus diesen Erläuterungen sieht man, daß sich mit allen diesen Lehrsätzen ganz deutliche und schikliche Begriffe verbinden lassen. In der That scheinen einige dieser Sätze nur darum sonderbar und ungereimt, weil man sich theils nicht deutlich denkt,



denkt, was Multiplikation und Division eigentlich sei; theils auch sich durch gewisse verworrene Vorstellungen abschrecken läßt, welche aus diesen Lehren zu folgen scheinen. Ich will davon ein Beispiel geben, welches stat aller andern dienen kann. Der Satz, daß zwei negative Factoren ein positives Product geben sollen, findet bei den Anfängern den meisten Anstoß. Denn da sie gewohnt sind, sich unter negativen Größen einen gewissen Mangel, als Schulden, Verlust &c. unter den positiven Größen das Gegentheil als vorräthiges Geld oder Gewinnst &c. zu denken; so glauben sie, es würde durch diesen Satz behauptet, daß Schulden durch Schulden multiplicirt einen Vorrath, Verlust durch Verlust multiplicirt einen Gewinnst geben solle. Das, was diese Worte zu sagen scheinen, muß freilich einem jeden sehr ungereimt vorkommen. Man sieht aber gar leicht ein, daß diese Worte, Schulden durch Schulden, Verlust durch Verlust multipliciren eben so wenig irgend einen Sinn haben, als 2 Pfund durch 3 Rthlr., 2 Fuder Heu durch 5 Ducaten multipliciren §. 225. Man kan gar wol sagen, daß man 2 Rthlr. Schulden durch die Zahl 3 multipliciren, daß ist, dreimal nemen wolle; aber wer kan sich deutlich erklären, was das heißen solle, 2 Rthlr. Schuld durch 3 Rthlr. Schuld multipliciren.

Hingegen behauptet man nichts unschickliches, wenn man sagt, daß — 3 in 5 Rthlr. Verlust multiplicirt das Product 15 Rthlr. Gewinnst gebe, in-

## 328 Neunzehntes Kap. Allgemeine

entscheiden, daß man der Einheit ein für allemal das Zeichen + beilegen solle, und theils diesem dunkeln Gefühle, theils der weisen Verträglichkeit der Algebristen hat man es zu verdanken, daß man auch hierin für einerlei Begriffe beständig einerlei Worte und Zeichen gebraucht.

### §. 497.

Es wird keine Schwierigkeit haben, alles was hier gesagt ist, auch auf die Division positiver und negativer Größen anzuwenden, wenn man nur bedenkt, daß durch Division diejenige Zahl gefunden wird, welche in dem Dividendus eben so enthalten ist, wie die Einheit im Divisor, folglich der Quotient die vierte Proportionalzahl zum Divisor der positiven Einheit und dem Dividendus sein muß. Die vier verschiednen Fälle geben folgende Proportionen:

$$+ 3 : + 1 = + 12 : + 4$$

$$- 3 : + 1 = - 12 : + 4$$

$$+ 3 : + 1 = - 12 : - 4$$

$$- 3 : + 1 = + 12 : - 4$$

### §. 498.

Aus diesen Erläuterungen siehet man, daß sich mit allen diesen Lehrsätzen ganz deutliche und schließliche Begriffe verbinden lassen. In der That scheinen einige dieser Sätze nur darum sonderbar und ungereimt, weil man sich theils nicht deutlich denkt,

denkt, was Multiplikation und Division eigentlich sei; theils auch sich durch gewisse verworrene Vorstellungen abschrecken läßt, welche aus diesen Lehren zu folgen scheinen. Ich will davon ein Beispiel geben, welches stat aller andern dienen kann. Der Satz, daß zwei negative Factoren ein positives Produkt geben sollen, findet bei den Anfängern den meisten Anstoß. Denn da sie gewohnt sind, sich unter negativen Größen einen gewissen Mangel, als Schulden, Verlust &c. unter den positiven Größen das Gegentheil als vorräthiges Geld oder Gewinnst &c. zu denken; so glauben sie, es würde durch diesen Satz behauptet, daß Schulden durch Schulden multiplicirt einen Vorrath, Verlust durch Verlust multiplicirt einen Gewinnst geben solle. Das, was diese Worte zu sagen scheinen, mus freilich einem jeden sehr ungereimt vorkommen. Man sieht aber gar leicht ein, daß diese Worte, Schulden durch Schulden, Verlust durch Verlust multipliciren eben so wenig irgend einen Sinn haben, als 2 Pfund durch 3 Rthlr., 2 Fuder Heu durch 5 Ducaten multipliciren S. 225. Man kan gar wol sagen, daß man 2 Rthlr. Schulden durch die Zahl 3 multipliciren, daß ist, dreimal nemen wolle; aber wer kan sich deutlich erklären, was das heißen solle, 2 Rthlr. Schuld durch 3 Rthlr. Schuld multipliciren.

Hingegen behauptet man nichts unschickliches, wenn man sagt, daß — 3 in 5 Rthlr. Verlust multiplicirt das Produkt 15 Rthlr. Gewinnst gebe, in-

### 330 Neunzehntes Kap. Allgemeine

dem man damit nichts anders sagen wil, als daß das Gegentheil von 5 Rthlr. Schuld in 15 Rthlr. Verdinst eben so oft enthalten sei, als das Gegentheil von  $+1$  in  $-3$  enthalten ist.

§. 499.

Durch die algebraischen Bezeichnungen kan man sich die mehrsten Untersuchungen über arithmetische Wahrheiten ganz ungemein erleichtern, wenn gleich die dabei geführten Schlüsse nicht die gewöhnliche Form der algebraischen Auflösungen haben. Außer den §. §. 92, 135, 263, 270 u. mögen uns noch diejenigen nützlichen Regeln zum Beispiele dienen, nach welchen man sehr geschwinde übersehen kan, ob sich eine Zahl durch 3, 9, 11 u. ohne Rest theilen lassen, d. i. ob man den dritten, neunten oder elften Theil einer Zahl ohne Brüche angeben könne.

§. 500.

Gesezt, ich hätte von ohngefähr bemerkt, daß sich die Quersumme \*) der Zahl 4851, nämlich 18, desgleichen die Quersumme der Zahl 94422, nämlich 21 durch 3 dividiren lasse, und daß auch diese beiden Zahlen selbst ohne Rest durch 3 dividirt würden;

(\*) Quersumme der Zahl 4851 nenne ich die Summe  $4 + 8 + 5 + 1$ , welche gefunden wird, indem man die Ziffern einer Zahlenreihe, ohne auf ihre Decimalstellen zu sehen, als Einer betrachtet zusammenaddirt.

## Anmerk. über die Buchstaben. 331

den; so würd ich zu wissen wünschen, ob diese beiden Umstände allemal miteinander verbunden wären, und man sicher von dem einen auf den andern schließen könne. Folgende Schlüsse können uns von der Wahrheit dieser Vermutung überzeugen.

§. 501.

Die Reihe  $H. 100000 + Z. 10000 + t. 1000 + h. 100 + z. 10 + e$  erhält den Werth von 94322, sobald man  $e = 2, z = 2, h = 3, t = 4, Z = 9, H = 0$  setzt, oder wird  $= 4851$ , wenn man  $e = 1, z = 5, h = 8, t = 4, Z = 0, H = 0$  setzt, und so kan man durch diese Reihe eine jede Decimalreihe, welche nur nicht über 6 Decimalstellen hat, ausdrücken, indem man stat eines jeden Buchstaben e, z, h rc. entweder 0, oder von den andern einfachen Zahlen 1, 2, 3 . . . 8, 9 die gehörige Zahl schreibt.

§. 502.

Bedenkt man, daß

$$\begin{aligned}
 e &= e \\
 z. 10 &= z (3.3 + 1) = 3.3. z + z \\
 h. 100 &= h (33.3 + 1) = 33.3 h + h \\
 t. 1000 &= t (333.3 + 1) = 333.3 t + t \\
 Z. 10000 &= Z (3333.3 + 1) = 3333.3 Z + Z \\
 \text{demnach der dritte Theil dieser Reihe allemal ist:} \\
 3.3 z + 33.3 h + 333.3 t + 3333.3 Z + e + z + h + t + Z &= \\
 = 3 z + 33 h + 333 t + 3333 Z + e + z + h + t + Z
 \end{aligned}$$

3

so

### 330 Neunzehntes Kap. Allgemeine

dem man damit nichts anders sagen will, als daß das Gegentheil von 5 Rthlr. Schuld in 15 Rthlr. Verdienst eben so oft enthalten sei, als das Gegentheil von  $+1$  in  $-3$  enthalten ist.

§. 499.

Durch die algebraischen Bezeichnungen kann man sich die meisten Untersuchungen über arithmetische Wahrheiten ganz ungemein erleichtern, wenn gleich die dabei geführten Schlüsse nicht die gewöhnliche Form der algebraischen Auflösungen haben. Außer den §. §. 92, 135, 263, 270 u. mögen uns noch diejenigen nützlichen Regeln zum Beispiele dienen, nach welchen man sehr geschwinde übersehen kann, ob sich eine Zahl durch 3, 9, 11 u. ohne Rest theilen lassen, d. i. ob man den dritten, neunten oder elften Theil einer Zahl ohne Brüche angeben könne.

§. 500.

Es hätte von ohngefähr bemerkt, daß die \*) der Zahl 4851, nämlich 18, Quersumme der Zahl 94422, dividiren lasse, und daß auch diese ohne Rest durch 3 dividirt würden;

(\*) Quersumme der Zahl 4851 nenne ich die Summe  $4 + 8 + 5 + 1$ , welche gefunden wird, indem man die Ziffern einer Zahlenreihe, ohne auf ihre Decimalstellen zu sehen, als Einer betrachtet zusammen addirt.

## Anmerk. über die Buchstaben. 331

den; so würd ich zu wissen wünschen, ob diese beiden Umstände allemal miteinander verbunden wären, und man sicher von dem einen auf den andern schließen könne. Folgende Schlüsse können uns von der Wahrheit dieser Vermutung überzeugen.

§. 501.

Die Reihe  $H. 100000 + Z. 10000 + t. 1000 + h. 100 + z. 10 + e$  erhält den Werth von 94322, sobald man  $e = 2, z = 2, h = 3, t = 4, Z = 9, H = 0$  setzt, oder wird = 4851, wenn man  $e = 1, z = 5, h = 8, t = 4, Z = 0, H = 0$  setzt, und so kan man durch diese Reihe eine jede Decimalreihe, welche nur nicht über 6 Decimalstellen hat, ausdrücken, indem man stat eines jeden Buchstaben e, z, h &c. entweder 0, oder von den andern einfachen Zahlen 1, 2, 3 . . . 8, 9 die gehörige Zahl schreibt.

§. 502.

Bedenkt man, daß

$$\begin{aligned} e &= e \\ z. 10 &= z (3.3 + 1) = 3.3 z + z \\ h. 100 &= h (33.3 + 1) = 33.3 h + h \\ t. 1000 &= t (333.3 + 1) = 333.3 t + t \\ Z. 10000 &= Z (3333.3 + 1) = 3333.3 Z + Z \end{aligned}$$

demnach der dritte Theil dieser Reihe allemal ist:

$$3.3 z + 33.3 h + 333.3 t + 3333.3 Z + e + z + h + t + Z =$$

$$= 3 z + 33 h + 333 t + 3333 Z + \frac{e + z + h + t + Z}{3}$$

so

## 332. Neunzehntes Kap. Allgemeine

so übersehe man sogleich, daß dieser dritte Theil allemal und nur alsdenn in einer ganzen Zahl könne angegeben werden; wenn  $e + z + h + t + Z$  das ist, wenn die Quersumme dieser Reihe ohne Rest durch 3 dividirt wird.

§. 503.

Sobald in einer Decimalreihe der Einer eine durch 2 theilbare Zahl ist, so läßt sich die ganze Reihe ohne Rest durch 2 dividiren. Denn die Hälfte der übrigen Zehner, Hundert, Tausendzahlen ic. mus allemal eine ganze Zahl sein, da  $10 = 2 \cdot 5$ ,  $100 = 10 \cdot 2 \cdot 5$ ,  $1000 = 100 \cdot 2 \cdot 5$  ic. ist.

§. 504.

Wenn in einer Decimalreihe der Werth der beiden ersten Decimalstellen ohne Rest durch 4 getheilt wird; so läßt sich die ganze Reihe durch 4 theilen. Es mus z. B. 89324 durch 4 dividirt eine ganze Zahl geben, weil  $\frac{2^2}{4}$  eine ganze Zahl giebt. Denn da  $100 = 4 \cdot 25$ , folglich ein jedes einzelnes Hundert durch 4 theilbar ist; so mus eine jede Hundertzahl, folglich auch eine jede Tausend-Zehntausend, Zahl u. s. w. durch 4 theilbar sein.

§. 505.

Eine jede Decimalreihe ist durch 8 theilbar; sobald nur der Werth der drei ersten Decimalstellen durch 8 ohne Rest getheilt wird. Denn da z. B.  $49576 = 49000 + 576 = 49 \cdot 125 \cdot 8 + 576$  ist; so wird der 8te Theil von 49576 gewis eine ganze Zahl sein, wenn nur 576 eine ganze Zahl giebt.

§. 506.



# Anmerk. über die Buchstabenr. 333

§. 506.

Eben so leicht ist es einzusehen, daß eine jede Decimalreihe allemal und nur in dem Falle durch 5 theilbar ist, wenn die Einer-Zahl selbst eine 5 ist; und durch 10 nur in dem Falle ohne Rest dividirt wird, wenn an der Einerstelle eine 0 steht.

§. 507.

Da eine jede Zahl, welche nicht nur durch 2, sondern auch durch 3 ohne Rest dividirt wird, nothwendig auch durch 6 theilbar ist; so mus eine jede gerade Zahl, deren Quersumme durch 3 ohne Rest dividirt wird, auch durch 6 theilbar sein.

§. 508.

Hiemit haben wir sehr leicht zu übersehende Kennzeichen aufgefunden, woraus man abnehmen kan, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8 und 10 theilbar sei. Lassen sich eben so nützliche Regeln über die durch 7 theilbaren Zahlen bestimmen? Da

$$\begin{aligned}
 e &= e \\
 z. 10 &= z(7 + 3) = 7z + 3z \\
 h. 100 &= h(14 \cdot 7 + 2) = 14 \cdot 7h + 2h \\
 t. 1000 &= t(142 \cdot 7 + 6) = 142 \cdot 7t + 6t \\
 Z. 10000 &= Z(1428 \cdot 7 + 4) = 1428 \cdot 7Z + 4Z \\
 H. 100000 &= H(14285 \cdot 7 + 5) = 14285 \cdot 7H + 5H \\
 T. 1000000 &= T(142857 \cdot 7 + 1) = 142857 \cdot 7T + T; \\
 \text{so mus eine jede Decimalreihe durch 7 theilbar sein, wenn}
 \end{aligned}$$

$$\underline{e + 3z + 2h + 6t + 4Z + 5H + T \text{ eine ganze}}$$

7

Zahl giebt.

- §. 509.

## 334 Neunzehntes Kap. Allgemeine

§. 509.

Wir können z. B. überzeugt sein, daß sich die Zahl 5943 durch 7 dividiren lasse, da  $3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 6 \cdot 5 = 63$  und  $\frac{63}{7} = 9$  ist. Ob nun gleich diese Bestimmungen so verwickelt sind, daß man weit lieber die Division durch 7 sogleich selbst versuchen wird; so ist doch diese Untersuchung in so fern nützlich gewesen, als sie uns überzeugt hat, daß sich von der Theilbarkeit durch 7 keine nützliche Kennzeichen auffinden lassen. Vielleicht sind wir glücklicher, wenn wir ähnliche Untersuchungen wegen der durch 9 theilbaren Zahlen anstellen.

§. 510.

$$\begin{aligned}
 &\text{Es ist } e = e \\
 &z. 10 = z (9 + 1) = 9z + z \\
 &h. 100 = h (11 \cdot 9 + 1) = 11 \cdot 9 \cdot h + h \\
 &t. 1000 = t (111 \cdot 9 + 1) = 111 \cdot 9 \cdot t + t \\
 &Z. 10000 = Z (1111 \cdot 9 + 1) = 1111 \cdot 9 \cdot Z + Z \\
 &\text{folglich } \underline{e + z \cdot 10 + h \cdot 100 + t \cdot 1000 + Z \cdot 10000 =} \\
 &\quad \quad \quad 9 \\
 &\underline{9z + 11 \cdot 9 \cdot h + 111 \cdot 9 \cdot t + 1111 \cdot 9 \cdot Z + e + z + h + t + Z} \\
 &\quad \quad \quad 9 \\
 &= \underline{z + 11 \cdot h + 111 \cdot t + 1111 \cdot Z + e + z + h + t + Z}
 \end{aligned}$$

folglich muß eine jede Decimalzahl durch 9 theilbar sein, dessen Quersumme durch 9 dividirt eine ganze Zahl giebt.

§. 511.

§. 511.

Eine Zahl kan ohne Rest durch 11 dividirt werden, wenn von der Quersumme aus den Einern; Hundert- Zehntausend- Tausendtausend- Zahlen zc. die Quersumme der Zehner, Tausend- Hunderttausend- Zahlen abgezogen, entweder 0 oder eine andere durch 11 theilbare Zahl giebt.

Denn es ist

$$\begin{aligned} e &= e \\ z. 10 &= z (11 - 1) = 11 z - z \\ h. 100 &= h (11, 9 + 1) = 11, 9 h + h \\ t. 1000 &= t (1100 - 100) = 1100 - 99 t - t \\ Z. 10000 &= Z (9999 + 1) = 9999 Z + Z \\ H. 100000 &= H (110000 - 10000) = 110000 H \\ &\quad - 9999 H - H \end{aligned}$$

$$T. 1000000 = T (999999 + 1) = 999999 T + T$$

folglich wird allemal eine ganze Zahl den eilften Theil aller derjenigen Decimalreihen angeben, in welchen  $e + h + Z + T - z - t - H$  das ist

$$\frac{(e + h + Z + T) - (z + t + H)}{11} \text{ keinen}$$

Bruch giebt. Dies geschieht nur in denen Fällen, wo entweder  $(e + h + z + T) - (Z + t + H) = 0$  oder  $= n. 11$  ist; indem n eine ganze Zahl bedeutet.

§. 512.

Es wird behauptet, daß man mit Ersparung vieler Mühe zu den Zahlen 479, 486, 96345, die vierte Proportionalzahl finden könne, indem man

(1

## 336 Neunzehntes Kap. Allgemeine 1c.

- 1) die erste Zahl von der zweiten subtrahirt,
- 2) durch diesen Rest (7) die dritte Zahl multiplicirt,
- 3) dies Produkt (674415) durch die erste Zahl (479) dividirt, und
- 4) den dadurch erhaltenen Quotienten  $\left(1407 \frac{462}{479}\right)$  zur dritten Zahl addirt, welches  $97752 \frac{462}{479}$  giebt.

Um nun zu entdecken, ob man durch dieses Verfahren in allen Fällen die vierte Proportionalzahl richtig finden müsse; so darf man nur die drei ersten Glieder einer Proportion durch  $a, b, c$ , ausdrücken und untersuchen, ob die durch ein solches Verfahren aus ihnen hergeleitete Zahl  $= \frac{b c}{a}$  werde.

Wir erhalten aber nach und nach

$$1) \quad b - a$$

$$2) \quad b c - a c$$

$$3) \quad \frac{b c - a c}{a}$$

$$4) \quad \frac{b c - a c}{a} + c \text{ das ist } = \frac{b c}{a} - c + c,$$

welches allerdings  $= \frac{b c}{a}$  ist.



Zwei:

## Zweiter Anhang.

---

### Verzeichnis von den nöthigsten Lehrsätzen und Aufgaben der Elementargeometrie.

I.

**A**lle Vertikalwinkel sind einander gleich.

2) Bei Parallellinien sind die äußern Winkel gleich, daher

3) Auch die Wechselwinkel einander gleich sind, und

4) Die Summe der beiden Zwischenwinkel  $= 180^\circ$  ist. Und umgekehrt.

5) Die Summe aller 3 Winkel beträgt in jedem Triangel  $= 180^\circ$ .

6) Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten, einzeln genommen, gleich sind zweien Seiten eines andern Triangels, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel in beiden Triangeln einander gleich sind; so decken sich die beiden Triangel.

7) Wenn in einem Triangel eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, einzeln genommen, gleich sind einer Seite des andern Triangels und denen beiden daranliegenden Winkeln; so decken sich die Triangel.

8)

8) Wenn

## 338 Zweiter Anhang. Lehrsätze.

8) Wenn die eine Seite eines Triangels gleich ist der einen Seite eines andern Triangels, die andre Seite des ersten Triangels gleich ist der andern Seite des andern Triangels und die dritte Seite des ersten Triangels gleich ist der dritten Seite des andern Triangels; so müssen diese beiden Triangel einander decken.

9) Eine Normallinie (senkrechte Linie) (Perpendiculairlinie) aus einem bestimmten Punkte in einer Linie aufzurichten.

10) Eine Normallinie aus einem bestimmten Punkte auf eine gegebne Linie fallen zu lassen.

11) Einen jeden Winkel in zwei gleiche Winkel zu theilen.

12) Eine jede Linie in zwei gleiche Linien zu theilen.

13) Der äußere Winkel am Triangel hält so viel Grade, wie die beiden innern zusammen genommen.

14) In einem gleichschenkligen Triangel sind die beiden den gleichen Seiten gegen über liegenden Winkel einander gleich, und umgekehrt, daher

15) In einem gleichseitigen Triangel die drei Winkel einander gleich sind.

16) Ein

16) Ein Winkel am Centro ist noch einmal so groß, als ein Winkel an der Peripherie, welcher mit ihm auf gleichen Bogen steht; daher

17) Alle Winkel an der Peripherie in einem oder gleichen Kreisen, welche auf einerlei oder gleichen Bogen stehen, einander gleich sind (\*), und ein jeder Winkel an der Peripherie im halben Kreis ein rechter Winkel sein mus.

18) Aus dem Endpunkte einer Linie eine senkrechte Linie aufzurichten.

19) Gleiche Sehnen in einem oder in gleichen Kreisen haben gleiche Bogen, und umgekehrt.

20) Eine aus der Mitte einer Sehne aufgerichtete Normallinie, theilt die beiden Bogen dieser Sehne in zwei gleiche Theile, und geht folglich durch das Centrum des Kreises.

2

21) Durch

(\*) Hierbei mus gezeigt werden, daß man auch von dem Winkel  $\angle AFI$  (Fig. 35.) wo die  $IF$  den Kreis in  $F$  berührt, sagen könne, daß er ein Winkel an der Peripherie sei und auf dem Bogen  $AF$  stehe, folglich  $\angle AFI = \angle APN = \angle ABF$  sei. Dieser Satz wird besonders bei den Auflösungen der XXXI. Aufgabe gebraucht. In dieser 35. Figur solte noch die Linie  $IF$  weiter fort bis nach  $I$  verlängert sein.

## 346 Zweiter Anhang: Lehrsätze

21) Durch jede drei gegebne Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Zirkelkreis zu beschreiben.

22) Die Summe aller Winkel in einem geradlinichten Vielecke zu finden.

23) Der Polygonwinkel in einem regulären  $n$ -Ecke ist 
$$= \frac{(n - 2) 180}{n}.$$

24) Um jedes reguläre Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.

25) Die Seite eines regulären Sechsecks ist gleich dem Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises.

26) Die Zahl der Zelle in der Grundlinie eines Rechteckes, multipliziert durch die Zahl der Zelle in seiner Höhe  $h$ , giebt ein Produkt  $b \cdot h$ , welches die Zahl derer Quadratzellen angiebt, welche in dem Flächenraume des Rechteckes Platz finden.

27) Alle Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboiden sind Parallelogramme.

28) Alle senkrechte Linien, zwischen Parallellinien sind einander gleich.

29) Ein jedes Parallelogramm ist dem Flächenraume nach einem Rechtecke gleich, welches mit ihm gleiche Höhe und Basis hat,

30) Da.



30.) Daher wird der Flächenraum eines jeden Parallelogrammes durch das Produkt  $b \cdot h$  angegeben, wenn  $b$  die Zahl der Grundlinie, und  $h$  die Zahl der Höhe ist. Bei einem Quadrate wird  $b = h$ , also durch  $b \cdot b$  der Flächenraum eines Quadrates angegeben, dessen Seite  $= b$  ist.

31.) Ein jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie in zwei sich deckende Triangel zertheilt. Daher müssen in einem Parallelogramme die gegen über liegenden Winkel und Seiten einander gleich sein.

32.) Umgekehrt, wird erwiesen, daß jede vielseltige Figur, deren gegen über liegende Seiten einander gleich sind, ein Parallelogramm ist.

33.) Der Flächenraum eines jeden Triangels wird durch  $\frac{b \cdot h}{2}$  angegeben, wenn  $b$  die Zahl der Längenmaße in der Basis und  $h$  die Zahl der Längenmaße in der Höhe anzeigt. Ein jedes gerade linichte Vieleck kan in Triangel zertheilt und danach ausgemessen werden.

34.) Wenn Fig. etwan nur der 1000000theil ist; so wird er merklich abweichen. 1) Parabelinichter Triangel,

## 342 Zweiter Anhang. Lehrsätze

CH ist, so daß die Zahl von  $\frac{ED \cdot CH}{2}$  den Flächen-

raum dieses kleinen Triangels, folglich  $100000 \cdot \frac{ED \cdot CH}{2}$  den Flächenraum des ganzen Zirkels

angeben mus. Da nun aber  $100000 \cdot ED = p$  ist, wenn  $p$  die Peripherie des Zirkels bedeutet, und  $CH$  der Radius des Zirkels selbst ist, welchen wir  $r$  nennen wollen; so mus  $p \cdot \frac{r}{2}$  den Flächen-

raum des ganzen Zirkels angeben.  $p \cdot \frac{r}{2}$  ist auch

$= p \cdot \frac{d}{4}$ , wenn  $d$  den Diameter bedeutet. Nach

einer hinlänglich genauen Berechnung, deren Möglichkeit durch den folgenden Lehrsatz kan gezeigt werden, ist  $p = 3,14 d$ .

35) Das Quadrat der größten Seite eines rechtwinklichten Triangels (Quadrat der Hypothenuse) ist gleich den Quadraten der beiden kleinern Seiten (den Quadraten der beiden Katheten). Woraus sogleich folgt, daß das Quadrat des einen Katheten gleich sein müsse dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypothenuse und dem Quadrate des andern Katheten.

36) Wenn zwei durch Parallelen begränzte Linien von einer dritten Parallele durchschnitten werden; so verhalten sich die beiden ganzen Linien, wie

wie die von einerlei Parallelen abgeschnittenen Teile.

37) Wenn zwei Seiten eines geradenliniichten Triangels von einer geraden Linie dergestalt durchschnitten werden, daß sich die beiden durch diese Linie und die Spitze des Triangels begränzten Teile verhalten, wie die beiden Seiten; so geht diese schneidende Linie mit der dritten Seite des Triangels parallel.

38) Wenn in zweien Triangeln zwei Winkel einzeln genommen, einander gleich sind, so müssen die beiden Triangel ähnlich sein.

39) Wenn ein Winkel eines Triangels gleich ist einem Winkel eines andern Triangels, und die vier diese beiden Winkel einschließenden Seiten proportional sind; so müssen die beiden Triangel ähnlich sein.

40) Wenn A, B, C die drei Seiten eines Triangels, d, e, f die drei Seiten eines andern Triangels bedeuten, und es ist  $A : d = B : e$ , ferner  $A : d = C : f$ ; so müssen diese beiden Triangel einander ähnlich sein.

41) Zu jeden drei gegebenen Linien, die vierte Proportionallinie zu finden.

42) Zu jeden zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

§ 4

43) Eine

## 344 Zweiter Anhang. Lehrsätze

43) Eine gegebne Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

44) Eine gegebne Linie nach einem oder nach mehreren gegebenen Verhältnissen zu teilen.

45) Die Perimeter zweier ähnlichen Figuren verhalten sich wie zwei ihrer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

46) Die Flächenräume zweier ähnlichen Triangel verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

47) Die Flächenräume aller ähnlichen Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

48) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Durch- oder Halbmesser.

49) Zwei Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser.

50) Wenn eines rechtwinklichten Parallelepipedums Länge  $l'''$ , Breite  $b'''$  und Höhe  $h'''$  hält; so ist der Inhalt des Parallelepipedums  $= lbh'''$  oder auch  $= gh$ , indem  $g = lb$  gesetzt wird, und also  $g$  das Maß der Grundfläche anzeigt.

51) Ein jedes Parallelepipedum, jedes Prisma und jeder Cylinder ist gleich einem rechtwinklichten Parallelepipedum, welches mit ihm gleiche Grund-

Grundfläche  $g$  und Höhe  $h$  hat; folglich wird auch der Inhalt aller dieser Figuren durch das Produkt  $g h$  angegeben.

52) Ein Kubus ist ein rechtwinkliges Parallelepipedum, wo  $b = l = h$ , folglich aus der Inhalt eines Kubus, dessen Seite  $= b$  ist,  $= b^3$  sein.

53) Alle dreiseitige Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen sind einander gleich. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche  $g$  und Höhe  $h$  hat; folglich wird der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide durch die Zahl  $\frac{g h}{3}$  oder  $\frac{g \cdot h}{3}$  angegeben.

54) Eine jede vielseitige Pyramide kann in mehrere dreiseitige Pyramiden zertheilt, und ein Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet, und dadurch gezeigt werden, daß der Inhalt einer jeden Pyramide und eines jeden Kegels  $= \frac{g h}{3}$  sei. Und da bei einem Kegel  $g = p d$

ist; so wird auch der Inhalt eines Kegels durch  $\frac{p d h}{3}$  ausgedrückt.

12

55) Zwei Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser.

¶ 5

56) Eine

## 346 Zweiter Anhang: Behauptungen.

56. Eine Kugel ist  $\frac{2}{3}$  von einem Cylinder, dessen Grundfläche einer größten Zirkelscheibe der Kugel, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Daher ist die Kugel  $= \frac{2}{3} p d$ , das ist  $p d^2$  oder  $\frac{2}{3} \pi d^3$  wenn  $d$  den Durchmesser der Kugel und  $p$  die dazu gehörige Peripherie angiebt.

57.) Die Umfläche einer Kugel ist  $= p d$ .

58.) Die Seitenfläche eines geraden Cylinders ist  $= p h$ , wenn  $p$  die Peripherie seiner Grundfläche und  $h$  seine Höhe angiebt.

59.) Die Seitenfläche eines geraden Kegels ist  $= p s$ , wenn  $p$  die Peripherie seiner Grundfläche und  $s$  die Länge einer geraden Linie angiebt, welche aus der Spitze des Kegels nach einem Punkte dieser Peripherie gezogen wird.



Der

## Verbesserungen.

Seite 4. Zeile 6. stat dreimal lies viermal.

S. 8. Z. 6 und 7, von unten, stat  $\frac{1}{37}$  l.  $\frac{1}{7}$ .

S. 31. unterste Zeile, stat 144 l. 44.

S. 39. Z. 2. stat  $= 6$  l.  $= x$ .

S. 40. Z. 3. stat  $\approx$  l.  $\approx$ .

— — 4. stat 12 —  $\approx$  l.  $\approx + 2$ .

S. 41. Z. 5 von unten, stat XII l. X.

S. 43. Z. 14. stat x l. 2x.

S. 67. Z. 8. stat 40 l. 10.

— — 10. stat 10 l. 20.

S. 68. Z. 5 von unten, stat 10 + l. + 10.

S. 70. Z. 9 stat — 40 l. + 40.

S. 72. Z. 5. stat 20 l. 20 Rthlr. vorräthiges Geld.

— — 7. stat — 20 l. 20 Rthlr. Schuld.

S. 75. Z. 8. stat  $\frac{1}{2} a - b$  l.  $\frac{1}{2} a$  und  $\frac{1}{2} b$ .

S. 84. Z. 9 und 10. stat 7 l. 1.

S. 89. Z. 2 von unten, stat 7 l. 6.

S. 90. Z. 9 von unten, stat 0, 9 l. 0, 0.

S. 93. Z. 9. stat  $\frac{4}{7}$  l.  $\frac{3}{7}$ .

— — 12 und 13. stat  $\alpha, 35$  l.  $\alpha, 37$ .

S. 94. Z. 6. stat  $\frac{2,0000}{3}$  l.  $\frac{2,000}{7}$

— — Z. 8 von unten, stat  $\frac{6,00}{7} = 0,85 x$ .

l.  $\frac{6,000000}{7} = 0,857142$ .

Seite

Seite 94. §. 7 v. u. stat: derselbe Rest bleiben muss; so wird  
6,000000 l. die Reste in eben der Ordnung

7  
wieder kommen müssen; so wird 6,000000000.

— — 6 v. u. stat 0,857142 2c. l. 0,85714285 2c.

§. 101. §. 13. stat §. 162 l. 100.

§. 105. §. 4. stat der beiden a. lies jedes mal b.

§. 109. §. 2. stat §. 114 l. §. 173.

§. 116. §. 10. stat  $5\frac{3}{4}$  l.  $5\frac{3}{4}$ .

— — §. 17. stat 5. 3. 23 l. 5. 23.

— — §. 18. stat 344. l. 125.

§. 117. §. 7 v. u. stat c l.  $\frac{c}{n}$ .

§. 119. §. 10 v. u. stat § l. §.

§. 120. §. 2 v. u. stat 2 y l. 2 y.  
15

§. 122. §. 6, 7, 8, 9. u. u. stat 1000 l. 100.

§. 130. §. 5 v. u. stat x l. c — x.

§. 136. §. 10. stat 41 l. 41.

§. 139. §. 4 u. u. stat: in  $AB : AC = AD$   
l. L in  $AB : AC = AD : L$ .

§. 152. §. 4 v. u. stat pag. 89 l. pag. 59.

§. 156. §. 4. stat Lehrsatz l. Beweis.

§. 159. §. 6. stat §. 45 l. §. 43.

§. 161. §. 3 v. u. stat 22 l. 22<sup>p</sup>.

§. 165. §. 5 v. u. stat 6561 l. 6241.

§. 171. §. 4. stat = 925 l. = 900.

§. 183. §. 3. stat k l. h.

§. 194. §. 9. stat  $\frac{4}{5}$  l. 45.  
2 y



Seite 214. Z. 5 v. u. stat Num. 44 l. Num. 46.

E. 218. Z. 10. stat §, 233 l. §. 332.

E. 220. Z. 4. stat mittlere l. dritte.

— — Z. 5. stat zwischen l. zu.

E. 222. Z. 7, 8, 12 stat f l. F.

E. 223. Z. 4...6 stat:  $GF \subset CB$  (Num. 37.) und  
daher  $0 = u$  sein. Da nun ferner  $\supset GAF$   
 $= \supset CAB$ ; so mus (Num. 38.), lies: und  
ferner  $\supset GAF = \supset CAB$ , (nach Num. 39.)

E. 227. Z. 3 v. u. stat e a d l. e A d.

E. 238. Z. 6 v. u. stat  $x^2$  l.  $3x^2$ .

E. 242. Z. 9 v. u. stat 163, 92 l. 163, 8.

E. 244. Z. 8. stat x l. 2c.

E. 249. Z. 8. stat x l. a.

E. 254. Z. 7 v. u. stat  $FD^2$  l.  $FE^2$

— — Z. 7. v. u. stat  $r^2$  l.  $r^3$ .

E. 255. Z. 2. v. u. stat y l. g.

— — Z. 3. v. u. stat  $x^3$  l. x.

E. 267. Z. 11. stat 800 l. 400. und stat 400 l. 800.

— — Z. 13. stat 2 : 1 l. 1 : 2.

E. 271. Z. 4. stat, so ist AD l. so ist BD.

— — Z. 5. stat —  $AD^2$  l. —  $BD^2$ .

E. 264. Z. 6 v. u. stat 80 l. 88.

E. 279. Z. 7. stat P l. P.

E. 284. Z. 5 v. u. stat n B m l. n B M.

E. 293. Z. 3. v. u. da ferner . . . gefunden werden, kan  
weggestrichen werden.

E. 295. Z. 12. stat n (a l.  $\frac{n}{2}$  (a.

E. 303. stat 5 l. 6. stat 8. l. 9.



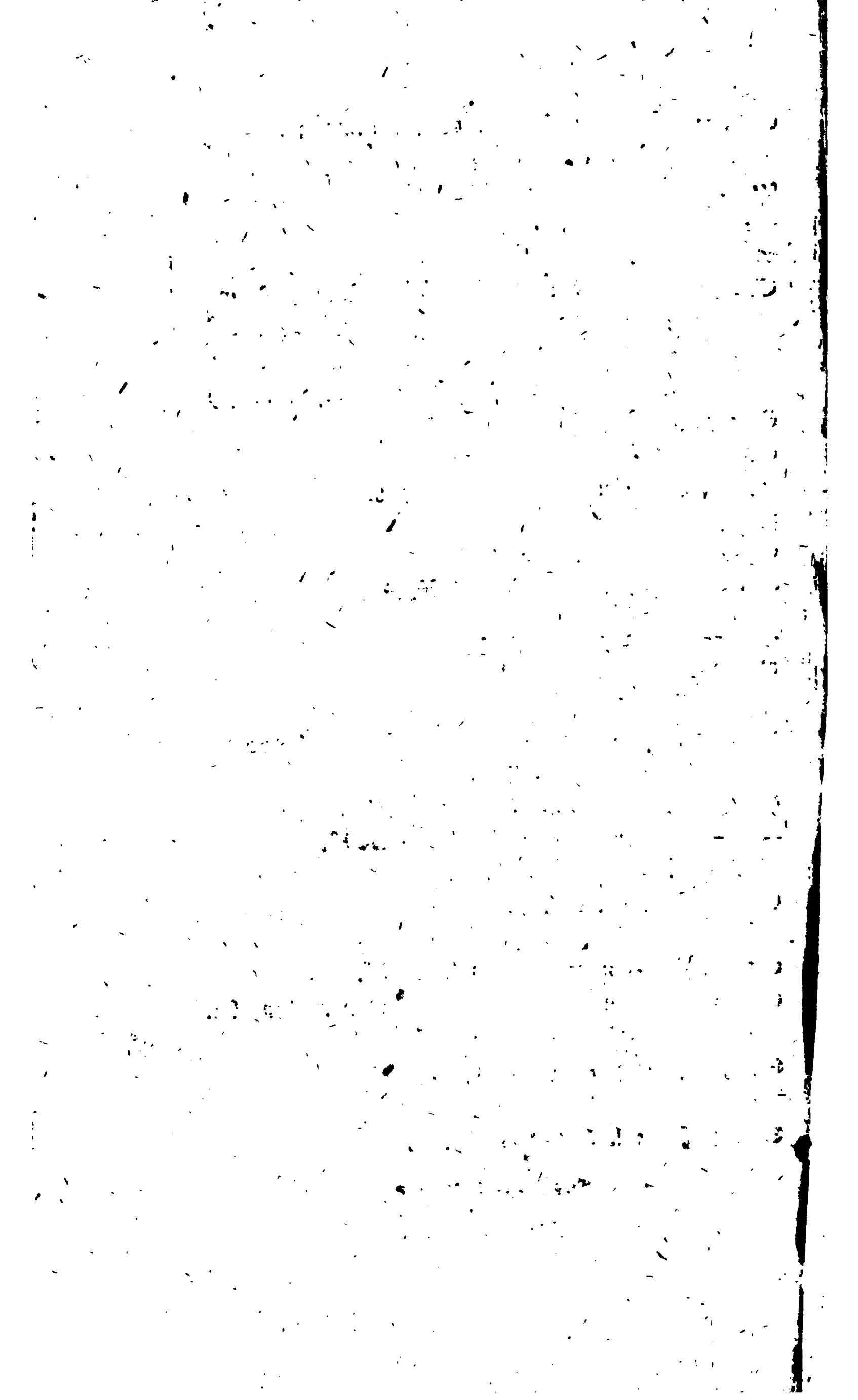


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 8.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 14.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 19.

Fig. 15.

Fig. 16.

er. Unterricht in der Algebra



Sonate pour le Clavier avec Violon  
 et Violoncelle N° 3 & pour Violon  
 et Violoncelle N° 4  
 Sonate pour le Clavier avec Violon  
 et Violoncelle N° 5  
 Grande Sonate pour le Clavier avec Violon  
 et Violoncelle N° 6

1110

ℓ

~~Fong~~

44

5/2